MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

10. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

10. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Inhaltsverzeichnis

Seite

Berwald, L., Über affine Geometrie XXX: Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie 160

Bóbr, St., Eine Verallgemeinerung des v. Kochschen Satzes über die absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten 1

van der Corput, J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode 105

Falckenberg, H., Ableitung der „Ergänzungsrelationen" aus den Formeln von Simon L'Huilier 17

Hamburger, H., Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. (Erste Mitteilung) 240

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood. The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line 283

Kommerell, K., Klassifikation der Raumkorrelationen 217

Lagally, M., Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme . 231

Landau, E., Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen 128

Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes 130

Reidemeister, K., Über Körper konstanten Durchmessers 214

Reidemeister, K., Über affine Geometrie. XXXI: Beständig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Eilinien 318

Remak, R., Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren 12

Rosenthal, A., Über Peanoflächen und ihren Rand 102

Siegel, C., Approximation algebraischer Zahlen 173

Szidon, S., Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen 121

Tortorici, P., Alcune osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate 255

Weitzenböck, R., Zur Tensoralgebra 80

Weyl, H., Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich) 39

Weyl, H., Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$ 88

Eine Verallgemeinerung des v. Kochschen Satzes über die absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten[1].

Von

St. Bóbr in Zürich.

In seiner Abhandlung „*Sur la convergence des déterminants infinis*“[2] hat Helge v. Koch folgendes Theorem über die absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten bewiesen:

Die unendliche Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \cdots \\ A_{21} A_{22} \cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

konvergiert mit allen ihren Unterdeterminanten absolut, wenn

1. das unendliche Produkt $\prod_{i}^{1..\infty} |A_{ii}|$ und

2. die Doppelreihe $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik}|^2 \qquad (i \neq k)$

konvergiert.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Die unendliche Determinante Δ konvergiert mit allen ihren Unterdeterminanten, wenn

1. das unendliche Produkt $\prod_{i}^{1..\infty} |A_{ii}|$ konvergiert und

[1]) Diese Arbeit ist ein unwesentlich geänderter Auszug aus einem Teil meiner Inaugural-Dissertation, Beitrag zur Theorie der linearen Funktionen von abzählbar unendlich vielen Variablen und deren Interpretation in einem Raume von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, S. 50—79 (Zürich 1918. Meier).

[2]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 28 (1909), S. 255—266.

2. wenn es eine Zahl $p \geqq 2$ gibt derart, daß die Doppelreihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik}|^p \right\}^{\frac{1}{p-1}} \qquad (i \neq k)$$

konvergiert.

Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz analog demjenigen von v. Koch und wird in 2 durchgeführt; er stützt sich nur auf die Tatsache, daß die Ungleichungen[3])

$$(1) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

stets bestehen, wenn die rechts stehenden Reihen für irgendein $p > 1$ konvergieren.

Besitzt die Determinante Δ die verlangten Eigenschaften, so können wir über ihre Unterdeterminanten, die ebenfalls absolut konvergieren, folgende Sätze beweisen:

1. Die aus den $\frac{p}{p-1}$-ten bzw. p-ten Potenzen der absoluten Beträge derjenigen Unterdeterminanten von Δ, welche den Elementen irgendeiner Zeile bzw. Kolonne entsprechen, gebildeten Reihen konvergieren und ihre Summen liegen unter einer endlichen oberen Grenze.

2. Bedeuten $\binom{i}{k}$ die Unterdeterminanten ersten Ranges von Δ, so ist die Bilinearform

$$A(xy) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{i}{k} x_k y_i$$

beschränkt in bezug auf den Exponenten p, d. h. es gibt eine von den Wertsystemen (x_k), (y_i), für welche $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{p}{p-1}}$ konvergieren, und n unabhängige positive Zahl M, so daß

$$|A_n(xy)| \equiv \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{i}{k} x_k y_i \right| \leqq M \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

ist für jedes n und alle Wertsysteme (x_k), (y_i) von der verlangten Eigenschaft.

---

[3]) O. Hölder, Über einen Mittelwertsatz, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1889, S. 38–47. – F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913, S. 43–46.

Die Beweise dieser Sätze geben wir in **3** an; sie stützen sich auf die Eigenschaften der in bezug auf den Exponenten p beschränkten linearen und bilinearen Formen, welche wir ohne Beweise in **1** angeben, denn sie sind Verallgemeinerungen der bekannten Sätze über beschränkte lineare und bilineare Formen für $p = 2$ [4]) und lassen sich mit Berücksichtigung von (1) analog denjenigen durchführen.

Dies vorausgeschickt, können wir die unendlichen Gleichungssysteme

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$$

vom Rieszschen Typus [5]) mit der klassischen Methode der unendlichen Determinanten auflösen, wenn die Koeffizienten die Bedingungen des verallgemeinerten v. Kochschen Satzes erfüllen.

In **4** wird gezeigt, daß der verallgemeinerte v. Kochsche Satz auch für die Fredholmschen Funktionaldeterminanten gilt.

1. Definition. Eine Linearform $L(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ heißt beschränkt in bezug auf den Exponenten $p > 1$, wenn eine nicht nur von den (x_i), sondern auch von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß für jedes n und beliebige (x_i)

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big| \leqq M \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big\}^{\frac{1}{p}}$$

ist.

Satz I. Eine Linearform $L(x)$ ist dann und nur dann beschränkt in bezug auf den Exponenten $p > 1$, wenn die aus den Koeffizienten der Linearform gebildete Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\frac{p}{p-1}}$ konvergiert. Die genaue obere Grenze der Linearform ist gleich

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\frac{p}{p-1}} \Big\}^{\frac{p-1}{p}}$$

und stellt zugleich ihr wirkliches Maximum dar.

---

[4]) Vgl. Hellinger und Toeplitz, Grundlagen einer Theorie der unendlichen Matrizen, Math. Annalen, **69**, S. 289–330.

[5]) F. Riesz l. c. [3]), S. 46–64, betrachtet die unendlichen Gleichungen bei der Voraussetzung, daß $\sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik}|^p$ konvergiert für jedes i und irgendein $p > 1$ und sucht reguläre Lösungen, d. h für welche $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{p}{p-1}}$ konvergiert. Es gibt aber keine explizite Formel für die Lösungen.

Definition. Eine Bilinearform $A(xy) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k y_i$ heißt beschränkt in bezug auf den Exponenten $p > 1$, wenn eine nicht nur von den (x_k), (y_i), sondern auch von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß für jedes n und beliebige (x_k), (y_i)

$$|A_n(xy)| \equiv \Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k y_i\Big| \leqq M\Big\{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{\frac{p-1}{p}}$$

ist.

Satz II. Die aus den Koeffizienten irgendeiner Zeile oder irgendeiner Kolonne einer in bezug auf den Exponenten $p > 1$ beschränkten Bilinearform gebildete Reihe konvergiert und ihre Summe liegt ihrem absoluten Werte nach unter $M^{\frac{p}{p-1}}$ bzw. M^p, wo M die obere Grenze der Bilinearform bedeutet.

Satz III. Eine in bezug auf den Exponenten $p > 1$ beschränkte Bilinearform $A(xy)$ konvergiert für alle Wertsysteme ihrer beiden Variablenreihen, für welche $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$ und $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{\frac{p}{p-1}}$ konvergieren, sowohl bei der reihenweisen als auch bei der kolonnenweisen und abschnittweisen Summation und zwar nach demselben Limes, d. h.

$$\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k y_i = \sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\Big\}y_i = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}y_i\Big\}x_k.$$

Satz IV. Konvergiert die Doppelreihe $\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}$ oder $\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}$ für irgendein $p > 1$, so ist die Bilinearform

$$A(xy) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k y_i$$

beschränkt in bezug auf den Exponenten $\frac{p}{p-1}$ bzw. p.

2. Nach einem bekannten Satze von v. Koch[6]) konvergiert die unendliche Determinante Δ absolut, wenn das unendliche Produkt $\prod_{i}^{1..\infty}|A_{ii}|$ und die Reihe

[6]) Vgl. Helge v. Koch, Sur la convergence des déterminants d'ordre infini, Bihang till Kongl. Sr. Vet.-Akad. Handl., Bd. XXII, S. 1–31.

(2) $$S_1 = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} |A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_r i_1}| = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} |i_1 i_2 \ldots i_r|$$
$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$$

konvergieren und es ist

(3) $$|\Delta| \leqq [\Delta] \leqq e^S,$$

wobei

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} |A_{ii} - 1| + S_1$$

ist und $[\Delta]$ die Entwicklung von Δ bedeutet, wenn man $1 + |A_{ii} - 1|$ und $|A_{ik}|$ für A_{ii} bzw. A_{ik} einsetzt und alle Glieder mit dem Zeichen $+$ nimmt.

Es sei jetzt die unendliche Determinante Δ gegeben und es mögen das unendliche Produkt $\prod_{i}^{1 \ldots \infty} |A_{ii}|$ und die Doppelreihe

(4) $$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik}|^p \right\}^{\frac{1}{p-1}} = \sigma^{\frac{p}{p-1}} < 1 \qquad (p \geqq 2)$$

konvergieren. Dann konvergiert auch die Doppelreihe

(4a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{p-1} = \tau^p \leqq \sigma^p;$$

denn wegen $p \geqq 2$ kann man die Ungleichungen (1) anwenden und man erhält

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{p-1} \right]^{\frac{1}{p-1}} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |A_{ik}|^p \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Dies vorausgeschickt, können wir beweisen, daß die Reihe S_1, also auch S, für unsere Determinante konvergiert.

In der Tat hat man, wenn man

$$|A_{i_1 i_2} \ldots A_{i_r i_{r+1}}| = |i_1 i_2 \ldots i_r;\ i_{r+1}|$$

setzt und die Formeln (1), (4), (4a) berücksichtigt,

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} |i_1 i_2| = \sum_{i_1} \sum_{i_2} |i_1; i_2|\,|i_2; i_1|$$

$$\leqq \left[\sum_{i_1} \left\{ \sum_{i_2} |i_1; i_2|^p \right\}^{\frac{1}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\sum_{i_1} \left\{ \sum_{i_2} |i_2; i_1|^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{p-1} \right]^{\frac{1}{p}} \leqq \tau\sigma;$$

$$\sum_{i_2}\Big\{\sum_{i_3}|i_1 i_2; i_3|\Big\}^p = \sum_{i_2}\Big\{\sum_{i_3}|i_1; i_2|\,|i_2; i_3|\Big\}^p$$

$$\leqq \sum_{i_2}\Big\{\sum_{i_3}|i_2; i_3|^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{p-1}\cdot\sum_{i_3}|i_1; i_2|^p \leqq \tau^p \sum_{i_2}|i_1; i_2|^p;$$

$$\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2}|i_1 i_2; i_3|\Big\}^{\frac{p}{p-1}} = \sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2}|i_1; i_2|\,|i_2; i_3|\Big\}^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leqq \sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2}|i_1; i_2|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\cdot\sum_{i_2}|i_2; i_3|^{\frac{p}{p-1}} \leqq \sigma^{\frac{p}{p-1}}\sum_{i_2}|i_2; i_3|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Nimmt man an, diese Formeln seien richtig für ein bestimmtes n, d. h. es gilt

$$\sum_{i_1\cdots i_n}|i_1 i_2\cdots i_n| \leqq \frac{\sigma^{n-1}\tau}{\tau^{n-1}\sigma},$$

$$(5)\qquad \sum_{i_{n+1}}\Big\{\sum_{i_2\cdots i_n}|i_1 i_2\cdots i_n; i_{n+1}|\Big\}^p \leqq \tau^{p(n-1)}\sum_{i_{n+1}}|i_1; i_{n+1}|^p,$$

$$\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2\cdots i_n}|i_1 i_2\cdots i_n; i_{n+1}|\Big\}^{\frac{p}{p-1}} \leqq \sigma^{\frac{p}{p-1}(n-1)}\sum_{i_1}|i_1; i_{n+1}|^{\frac{p}{p-1}},$$

so beweist man ihre Richtigkeit für jedes n leicht durch den Schluß von n auf $n+1$. Denn es folgt aus unserer Voraussetzung (5)

$$\sum_{i_1\cdots i_{n+1}}|i_1\cdots i_{n+1}| = \sum_{i_1}\sum_{i_{n+1}}|i_{n+1}; i_1|\sum_{i_2\cdots i_n}|i_1\cdots i_n; i_{n+1}|$$

$$\leqq \sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_{n+1}}|i_{n+1}; i_1|^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{\frac{p-1}{p}}\Big\{\sum_{i_{n+1}}\Big[\sum|i_1\cdots i_n; i_{n+1}|\Big]^p\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \tau^{n-1}\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_{n+1}}|i_{n+1}; i_1|^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{\frac{p-1}{p}}\Big\{\sum_{i_{n+1}}|i_1; i_{n+1}|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \tau^{n-1}\cdot\tau\cdot\sigma = \tau^n\sigma \leqq \tau\sigma^n;$$

$$\sum_{i_{n+2}}\Big\{\sum_{i_2\cdots i_{n+1}}|i_1\cdots i_{n+1}; i_{n+2}|\Big\}^p = \sum_{i_{n+2}}\Big\{\sum_{i_{n+1}}|i_{n+1}; i_{n+2}|\sum_{i_2\cdots i_n}|i_1\cdots i_n; i_{n+1}|\Big\}^p$$

$$\leqq \sum_{i_{n+2}}\Big\{\sum_{i_{n+1}}|i_{n+1}; i_{n+2}|^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{p-1}\cdot\sum_{i_{n+1}}\Big[\sum_{i_2\cdots i_n}|i_1\cdots i_n; i_{n+1}|\Big]^p$$

$$\leqq \tau^p\cdot\tau^{p(n-1)}\sum_{n+1}|i_1; i_{n+1}|^p = \tau^{pn}\sum_{i_{n+1}}|i_1; i_{n+1}|^p;$$

$$\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2\dots i_{n+1}}|i_1\dots i_{n+1};i_{n+2}|\Big\}^{\frac{p}{p-1}}=\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2}|i_1;i_2|\sum_{i_3\dots i_{n+1}}|i_2\dots i_{n+1};i_{n+2}|\Big\}^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leqq\sum_{i_1}\Big\{\sum_{i_2}|i_1;i_2|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\cdot\sum_{i_2}\Big\{\sum_{i_3\dots i_{n+1}}|i_2\dots i_{n+1};i_{n+2}|\Big\}^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leqq\sigma^{\frac{p}{p-1}}\cdot\sigma^{\frac{p}{p-1}(n-1)}\sum_{i_2}|i_2;i_{n+2}|^{\frac{p}{p-1}}=\sigma^{n\frac{p}{p-1}}\sum_{i_2}|i_2;i_{n+2}|^{\frac{p}{p-}}.$$

Da die Formeln (5) für $n=2$ richtig sind, so sind sie auch richtig für jedes n.

Daraus folgt

$$S\leqq\begin{matrix}\sum_{i=1}^{\infty}|A_{ii}-1|+\sigma\tau+\sigma^2\tau+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}|A_{ii}-1|+\tau\frac{\sigma}{1-\sigma},\\ \sum_{i=1}^{\infty}|A_{ii}-1|+\sigma\tau+\sigma\tau^2+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}|A_{ii}-1|+\sigma\frac{\tau}{1-\tau},\end{matrix}$$

d. h. die Determinante A konvergiert absolut.

Ist aber $\sigma\geqq 1$, so bestimmt man einen Index J und eine positive Zahl M, so daß

$$\sum_{i=J+1}^{\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|A_{ik}|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(\varepsilon<1)$$

und

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{J}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|A_{ik}|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt.

Die Determinante

$$D=\begin{vmatrix}\frac{A_{11}}{M} & \frac{A_{12}}{M} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{A_{J1}}{M} & \frac{A_{J2}}{M} & \dots\\ A_{J+1,1} & A_{J+1,2} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}$$

ist von der verlangten Eigenschaft, d. h. die entsprechende Zahl $\sigma_D<1$; sie konvergiert also absolut, und da

$$\Delta=M^J D,\tag{6}$$

so konvergiert auch Δ absolut.

Es ist klar, daß jede Unterdeterminante von Δ von demselben Typus wie Δ ist; jede Unterdeterminante konvergiert also auch absolut.

3. Wir beweisen jetzt den Satz, daß die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \binom{i}{k} \right|^{\frac{p}{p-1}}$$

konvergieren und für jedes i unter einer positiven endlichen Größe g liegen. Es ist nach (6)

$$\Delta = M^J \cdot D,$$

wobei $\sigma_D < 1$ ist; M bedeutet im folgenden eine positive Zahl größer als eins.

Wir setzen an Stelle der Elemente der i-ten Zeile von Δ die Größen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

mit der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ und wählen eine bestimmte positive Zahl μ, so daß

$$\mu + \sigma_D < 1.$$

Setzt man zugleich

$$\bar{x}_n = \frac{\mu x_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots \text{ ad inf.}),$$

so erhält man absolut konvergente Determinanten Δ_x^i, $\Delta_{\bar{x}}^i$, D_x^i, für die

$$\Delta_x^i = \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\mu} \Delta_{\bar{x}}^i \leqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\mu} M^J D_{\bar{x}}^i$$

und

$$\left(\sigma_{D_{\bar{x}}^i}\right)^{\frac{p}{p-1}} \leqq \sigma_D^{\frac{p}{p-1}} + \mu^{\frac{p}{p-1}} \leqq (\sigma_D + \mu)^{\frac{p}{p-1}} < 1$$

für jedes i und jedes Wertsystem (x_n) ist.

Daraus folgt

$$S_{D_{\bar{x}}^i} < \sum_{i=1}^{\infty} |d_{ii} - 1| + |\bar{x}_i| + \frac{\sigma_{D_{\bar{x}}^i}}{1 - \sigma_{D_{\bar{x}}^i}} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |d_{ii} - 1| - \mu + \frac{\sigma_D + \mu}{1 - (\sigma_D + \mu)} = S,$$

wo d_{ii} die Elemente der Hauptdiagonale von D bedeuten, und

$$|\Delta_x^i| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \binom{i}{k} \right|$$

$$= \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\mu} |\Delta_{\bar{x}}^i| \leqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\mu} M^J |D_{\bar{x}}^i| \leqq \frac{M^J e^S}{\mu} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für jedes i und jedes Wertsystem (x_k) ist.

Die Linearformen $L_i(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \binom{i}{k} x_k$ sind also in bezug auf den Exponenten p beschränkt, und nach dem Satze I hat man für jedes i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \binom{i}{k} \right|^{\frac{p}{p-1}} \leqq g^{\frac{p}{p-1}},$$

wo $g = \frac{M^J e^S}{\mu}$ und von (x_k) unabhängig ist.

Den Satz, daß die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \binom{i}{k} \right|^p$ konvergieren und ihre Summen für jedes k unter einer und derselben positiven Zahl g liegen, beweist man ganz analog. Man nimmt nur zum Beweis τ_J statt σ_J.

Es gilt ferner der

Satz: Die Bilinearform $A(xy) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{i}{k} x_k y_i$ ist beschränkt in bezug auf den Exponenten p.

Beweis. Man bestimmt zuerst die Größen M, J und μ, so daß

$$\Delta = M^J D$$

und $\sigma_D + \mu < 1$ ist.

Dann hat man für den n-ten Abschnitt der Bilinearform

$$|A_n(xy)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{i}{k} x_k y_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta_x^i \right| = \frac{\left(\sum_{r=1}^{n} |x_r|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\mu} \left| \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta_{\bar{x}}^i \right|,$$

wenn man $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ und

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{r=1}^{n} |x_r|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \mu$$

setzt; Δ_x^i bedeutet diejenige Determinante, die man aus Δ erhält, wenn man die Größen (x_r) an Stelle der Elemente der i-ten Zeile einsetzt.

Nach dem vorigen Satze ist aber für jedes Wertsystem (x_r) und jedes i

$$|\Delta_{\bar{x}}^i| = \left| \bar{x}_i \binom{i}{i} + \sum_{\nu}{}' A_{\nu i} \binom{\nu}{i}_{\bar{x}}^i \right| \leqq M^J e^S$$

und

$$\left| \binom{i}{i} \right|^p + \sum_{\nu}{}' \left| \binom{\nu}{i}_{\bar{x}}^i \right|^p \leqq \left(M^J e^S \right)^p,$$

wobei $M^J e^S$ von $(\bar{x}_r)$ unabhängig ist und $\binom{\nu}{i}_{\bar{x}}^i$ die Entwicklung bezeich-

net, die man erhält, wenn man in $\binom{\nu}{i}$ an Stelle der Elementen der i-ten Zeile die Größen $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n$ einsetzt.

Daraus folgt

$$|\Delta_{\bar{x}}^{i}| \leqq \left\{ |\bar{x}_i| + \Big(\sum_{\nu}{}' |A_{\nu i}|^{\frac{p}{p-1}} \Big)^{\frac{p-1}{p}} \right\} \cdot M^J e^S$$

und

$$|A_n(x, y)| \leqq \Big(\sum_{r=1}^{n} |x_r|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \frac{M^J e^S}{\mu} \left\{ \Big(\sum_{i=1}^{n} |\bar{x}_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\nu}{}' |A_{\nu i}|^{\frac{p}{p-1}} \Big)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p}} \right\} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i| \right.$$

$$\leqq \frac{M^J e^S}{\mu} (\mu + \sigma_A) \Big(\sum_{r=1}^{n} |x_r|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{p}{p-1}} \Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqq \Gamma \Big(\sum_{r=1}^{n} |x_r|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{p}{p-1}} \Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

wobei $\Gamma = \frac{M^J e^S}{\mu} (\mu + \sigma_A)$ von (x) und (y) und n unabhängig ist, w. z. b. w.

4. Der verallgemeinerte v. Kochsche Satz gilt auch für die Fredholmsche Funktionaldeterminante

$$D_f = 1 + \int_0^1 f(xx)\,dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} f(xx) & f(xy) \\ f(yx) & f(yy) \end{vmatrix} dx\,dy + \ldots$$

und läßt sich folgendermaßen aussprechen[7]):

Die Funktionaldeterminante D_f konvergiert mit allen ihren Unterdeterminanten absolut, wenn die Integrale

$$\int_0^1 |f(xx)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 |f(xy)|^p\,dx\,dy \tag{7}$$

für irgendein $p \geqq 2$ existieren und endlich sind.

Denn es ist nach einer bekannten Formel

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \leqq \left[\int_0^1 |f(x)|^p\,dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(xy)|^p\,dy \right)^{\frac{1}{p-1}} dx \leqq \left[\int_0^1 \int_0^1 |f(xy)|^p\,dy\,dx \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(xy)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \right)^{p-1} dy \leqq \int_0^1 \int_0^1 |f(xy)|^p\,dx\,dy \qquad (p > 1).$$

[7]) Vgl. v. Koch, l. c.[2]).

Die Existenz und Endlichkeit der linksstehenden Integrale genügt ferner, um zu beweisen, daß die Funktionaldeterminante D_f mit allen ihren Unterdeterminanten absolut konvergiert.

Dies vorausgeschickt, können wir die Integralgleichung

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(xy)\varphi(y)\,dy = \psi(x)$$

mit Hilfe der absolut konvergenten Funktionaldeterminanten auflösen, wenn die Funktion $f(xy)$ den Bedingungen (7) genügt und die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ endliche Integrale

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx; \qquad \int_0^1 |\psi(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx$$

besitzen.

(Eingegangen am 3. Februar 1919.)

Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren.

Von

Robert Remak in Berlin.

Das Produkt zweier Untergruppen einer endlichen Gruppe heißt ein direktes Produkt, wenn die Faktoren teilerfremd sind, d. h. außer dem Einheitselement kein Element gemeinsam haben, und jedes Element des einen mit jedem Element des anderen vertauschbar ist. Es gilt das assoziative Gesetz der direkten Multiplikation. Für kommutative Gruppen läßt sich eine vollständige Übersicht über die Zerlegung in direkte unzerlegbare Faktoren gewinnen. Es gelten die beiden Sätze:

I. *Jede kommutative Gruppe ist darstellbar als direktes Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung.*

II. *Die Ordnungen der Faktoren zweier verschiedener Zerlegungen derselben kommutativen Gruppe in direkte zyklische Faktoren von Primzahlpotenzordnung stimmen, von der Reihenfolge abgesehen, miteinander überein.*

Die Faktoren sind also paarweise einander isomorph. Es folgt ferner aus beiden Sätzen, daß die zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung die einzigen direkt unzerlegbaren kommutativen Gruppen sind.

Als Satz von der Existenz der Basis und der Eindeutigkeit der Invarianten der kommutativen Gruppen sind diese Tatsachen längst bekannt[1]). Für beide Sätze habe ich einen Beweis geliefert, der sich auf Einteilung in Faktorgruppen stützt[2]); auf demselben Prinzip wird de folgende sehr kurze Beweis beruhen, der sich im übrigen den älteren Beweisen näher anschließt.

---

[1]) Frobenius und Stickelberger, „Über Gruppen vertauschbarer Elemente", Journ. f. Math., 86, S. 217. Vgl. auch Heinr. Weber, Lehrb. d. Algebra, Bd. 2, § 11 und 12, S. 38—49.

[2]) Journ. f. Math., 141, S. 245—250.

Unter einer Basis will ich im folgenden speziell ein vollständiges System von Basiselementen der zyklischen direkten Faktoren von Primzahlpotenzordnung einer Zerlegung einer kommutativen Gruppe verstehen[3]). Als bekannt setze ich folgenden Hilfssatz voraus, der fast unmittelbar aus der Definition des direkten Produktes folgt:

Hilfssatz 1. *Ein Produkt von Untergruppen einer kommutativen Gruppe ist dann und nur dann ein direktes, wenn seine Ordnung gleich dem Produkt der Ordnungen seiner Faktoren ist.*

Korollar. *Ein System von Elementen von Primzahlpotenzoranung ist also eine Basis einer kommutativen Gruppe, wenn das Produkt ihrer Ordnungen gleich der Ordnung der Gruppe ist und ihre Potenzprodukte jedes Element der Gruppe darstellen.*

Ich will als bekannt voraussetzen, daß sich jede kommutative Gruppe auf eine und nur eine Weise darstellen läßt als das direkte Produkt von Untergruppen von untereinander teilerfremden Primzahlpotenzordnungen, und will beide Sätze nur für kommutative Gruppen von Primzahlpotenzordnung beweisen.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine kommutative Gruppe von der Primzahlpotenzordnung $= p^{\gamma}$. Der Satz I sei bereits bewiesen für kommutative Gruppen, deren Ordnung eine niedrigere Potenz von p ist. Es sei A ein Element der höchsten vorkommenden Ordnung $a = p^{\alpha}$, $\mathfrak{A}$ die zyklische Gruppe der Potenzen von A. Wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$, so ist der Satz bewiesen. Andernfalls teile man $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{A}$ in Komplexe ein:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \cdot C_1 + \mathfrak{A} \cdot C_2 + \ldots + \mathfrak{A} \cdot C_{n-1},$$

wo die Anzahl der Komplexe oder die Ordnung der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ gleich

$$n = \frac{c}{a} = p^{\gamma - \alpha}.$$

Ein Element $\overline{C}$ von $\mathfrak{C}$ heiße *rein* (in bezug auf $\mathfrak{A}$), wenn die niedrigste Potenz von $\overline{C}$, die in $\mathfrak{A}$ vorkommt, gleich dem Einheitselement E ist, wenn also die Ordnung von $\overline{C}$ in $\mathfrak{C}$ dieselbe ist wie die des Komplexes $\overline{C} \cdot \mathfrak{A}$ in der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$.

Hilfssatz 2. *Jeder Komplex $\mathfrak{A} \cdot C_\nu$ enthält mindestens ein reines Element $\overline{C}_\nu$.*

Beweis. Es sei C_ν nicht rein, $\overline{n}$ sei die niedrigste Potenz von C_ν, die in $\mathfrak{A}$ vorkommt, also:

$$C_\nu^{\overline{n}} = A^m. \qquad (1)$$

[3]) Siehe Weber, Lehrb. d. Algebra, Bd. 2, S. 48.

Es ist also auch

$$(C_\nu \cdot \mathfrak{A})^{\bar{n}} = C_\nu^{\bar{n}} \cdot \mathfrak{A} = A^m \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Umgekehrt ist aber auch (1) eine Folge von

$$C_\nu^{\bar{n}} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Daher ist $\bar{n}$ gleich der Ordnung von $C_\nu \cdot \mathfrak{A}$ in der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$. Also ist $\bar{n}$ ein Teiler von $n = p^{\gamma-\alpha}$:

$$\bar{n} = p^\delta,$$

wo

$$\delta \leqq \gamma - \alpha.$$

Ferner ist, da $a = p^\alpha$ die höchste vorkommende Ordnung eines Elementes von $\mathfrak{C}$,

$$C_\nu^a = C_\nu^{\bar{n} \cdot \frac{a}{\bar{n}}} = A^{m \cdot \frac{a}{\bar{n}}} = E.$$

Also ist $\frac{m\,a}{\bar{n}}$ teilbar durch a, also $\frac{m}{\bar{n}}$ eine ganze Zahl, m teilbar durch $\bar{n}$. Man setze

$$\bar{C}_\nu = C_\nu \cdot A^{-\frac{m}{\bar{n}}}.$$

$\bar{C}_\nu$ ist ein Element des Komplexes $C_\nu \cdot \mathfrak{A}$. Die niedrigste Potenz von $\bar{C}_\nu$, die in $\mathfrak{A}$ vorkommt, ist also gleichfalls die $\bar{n}$-te. Es ist aber wegen (1)

$$\bar{C}_\nu^{\bar{n}} = C_\nu^{\bar{n}} \cdot A^{-m} = E.$$

Also ist $\bar{C}_\nu$ ein reines Element. Jeder Komplex nach $\mathfrak{A}$ enthält also mindestens ein reines Element.

Für die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ gilt bereits der zu beweisende Satz I.

$$\mathfrak{A} \cdot B_1, \quad \mathfrak{A} \cdot B_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{A} \cdot B_r$$

möge eine Basis von $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ sein. Man greife aus jedem Komplex der Basis ein reines Element heraus:

$$\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_r.$$

Als Potenzprodukte von

$$A, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_r \tag{3}$$

lassen sich sämtliche Elemente von $\mathfrak{C}$ darstellen. Da die Ordnung eines $\bar{B}_\varrho$ in $\mathfrak{C}$ mit der Ordnung des Komplexes $\bar{B}_\varrho \cdot \mathfrak{A}$ in $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt, so ist die Zahl der formal verschiedenen Potenzprodukte der Elemente (3) gleich

$$a \cdot \frac{c}{a} = a.$$

Also ist (3) eine Basis von $\mathfrak{C}$ nach dem Korollar zu Hilfssatz 1. tz I gilt also allgemein, da er für Gruppen von der Ordnung p trivial ist.

Um Satz II zu beweisen, nehme ich an, der Satz sei bereits be- iesen für alle kommutativen Gruppen, deren Ordnung eine niedrigere otenz von p als die Ordnung $c = p^\gamma$ der Gruppe $\mathfrak{C}$. Es sei

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_s$$

f zweierlei Art in zyklische direkte Faktoren zerlegt. Die Ordnungen ien

$$c = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_s.$$

sei ein Faktor der höchsten vorkommenden Ordnung $a_1 = p^{\alpha_1}$. Es sei ein Basiselement von $\mathfrak{A}_1$. Ferner sei

$$A_1 = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_s$$

ndeutig dargestellt als Produkt von Elementen der Faktoren $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_s$. indestens eins der Elemente $B_1, B_2, \ldots, B_s$, z. B. B_1, muß gleichfalls von r Ordnung $p^{\alpha_1} = a_1$ sein, weil sonst die Ordnung der rechten Seite von) kleiner wäre als die der linken. Es ist also $b_1 = a_1$. Wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1$, ist also $c = a_1 = b_1$, also $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_1$. In diesem Falle ist also der Satz wiesen. Im anderen Falle bilde man

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}_1 \cdot (\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3 \times \ldots \times \mathfrak{B}_s).$$

enthält das Element

$$B_1 = A_1 \cdot B_2^{-1} \cdot \ldots \cdot B_s^{-1},$$

so $\mathfrak{B}_1$, also $\mathfrak{C}$; also ist $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$. Also ist das Produkt (5) nach Hilfs- tz 1 ein direktes, also

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_s.$$

an gehe durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}_1$ zur Faktorgruppe über. (Den ktor $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}$ als Einheitskomplex kann man fortlassen.) Es ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathfrak{A}_r \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}$$
$$= \frac{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \frac{\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathfrak{B}_s \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}.$$

e Ordnung von $\frac{\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}$ ist $\frac{a_2 \cdot a_1}{a_1} = a_2$. Also stellen die zweite und dritte te von (6)

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_r = b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_s = \frac{c}{a_1}$$

mal verschiedene Komplexe dar. Da aber die linke Seite $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_1}$ $\frac{c}{a_1}$ wirklich

verschiedene Komplexe enthält, so ist das Produkt der Faktorgruppen in (6) ein direktes, also

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \times \frac{\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \times \ldots \times \frac{\mathfrak{A}_r \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}$$
$$= \frac{\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_3 \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1} \times \ldots \times \frac{\mathfrak{B}_s \times \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_1}.$$

Für die Faktorgruppe gilt aber bereits der zu beweisende Satz II. Also ist bei passender Wahl der Bezeichnung $r = s$ und

$$a_2 = b_2, a_3 = b_3, \ldots, a_r = b_r.$$

Es war $a_1 = b_1$, also gilt Satz II auch für die Gruppe $\mathfrak{C}$. Da er für Gruppen von der Ordnung p trivial ist, so gilt er allgemein.

(Eingegangen am 30. November 1919.)

bleitung der „Ergänzungsrelationen“ aus den Formeln von Simon L'Huilier.

Von

Hans Falckenberg in Königsberg i. Pr.

In E. Studys[1]) Abhandlung über sphärische Trigonometrie, die sich gewisser Hinsicht an Arbeiten von Gauß und Möbius anschließt, kommt r charakteristische Unterschied der (sphärischen) Dreiecke erster und zweiter lasse (eigentliche und uneigentliche Dreiecke), der übrigens schon Gauß kannt gewesen zu sein scheint, in den Delambreschen[2]) Gleichungen m Ausdruck. Mit ihnen gleichbedeutend sind die Formeln von Simon Huilier.

Versteht man unter $l_1\pi, l_2\pi, l_3\pi$ die Seiten, unter $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$ die ementar definierten[3]) Winkel eines *eigentlichen* (Kreisbogen-) Dreiecks d führt mit Study die Größen

$$\left\{\begin{array}{ll} s_0 = \dfrac{2-l_1-l_2-l_3}{2}, & \sigma_0 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}{2}, \\ s_1 = \dfrac{-l_1+l_2+l_3}{2}, & \sigma_1 = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+1}{2}, \\ s_2 = \dfrac{-l_2+l_3+l_1}{2}, & \sigma_2 = \dfrac{\lambda_2-\lambda_3-\lambda_1+1}{2}, \\ s_3 = \dfrac{-l_3+l_1+l_2}{2}, & \sigma_3 = \dfrac{\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2+1}{2} \end{array}\right. \quad (1)$$

, wobei

a)
$$\sum_{i=0}^{3} s_i = \sum_{i=0}^{3} \sigma_i = 1 \quad (2)$$

[1]) „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funknen“, Abh. der math. phys. Klasse der Sächs. Ges. der Wiss., **20** (1893), S. 85.

[2]) 1807, auch Mollweidesche (1808) oder Gaußsche (1809) Formeln genannt.

[3]) Im Gegensatz zu der von Study verwendeten „symmetrischen“ Definition, dem hier behandelten Problem nicht naturgemäß wäre. Die Symmetrie zwischen ten und Winkeln in (1) geht dadurch verloren.

ist, so erhält man folgende von Study angeschriebene Form der für eigentliche Dreiecke gültigen L'Huilierschen Gleichungen:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{s_i\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_i\pi}{2} = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\sigma_0\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_1\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_2\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sigma_3\pi}{2}} \quad (i=0,1,2,3).$$

Das Auftreten der Größen σ_k $(k=1, 2, 3)$ in diesen Formeln weist auf die bekannten von F. Klein[4]) entdeckten „Ergänzungsrelationen" für *einfach zusammenhängende* Dreiecke (Membrandreiecke) hin und legt den Gedanken einer Ableitung dieser Relationen aus den L'Huilierschen Formeln nahe[5]).

Man sieht, daß bei stetiger Veränderung der Dreieckswinkel und dadurch bedingter stetiger Verzerrung des Dreieckes Verzweigungen in den L'Huilierschen Gleichungen nur beim Durchgang durch ein parabolisches Dreieck — eine oder mehrere der Größen σ_i $(i=0, 1, 2, 3)$ werden ganzzahlig, sämtliche Seiten des Dreiecks ganze Vielfache von π — auftreten können. Verfolgt man in allen Fällen *einfach zusammenhängender* Dreiecke unter Zugrundelegung der projektiven (Caleyschen) Maßbestimmung das Verhalten der Seiten bei den Durchgängen durch die Verzweigungsstellen *geometrisch*, so gewinnt man, weil diese Dreiecke durch Vorgabe der Winkel *ein*deutig bestimmt sind, an jeder parabolischen Stelle eine Bestimmung des in Gl. (2) noch offenen *Vorzeichens* (§§ 2 bis 4), *wodurch die Formeln für das Kontinuum der Kleinschen Membrandreiecke aus den für die eigentlichen geltenden herausgeschält sind.* Mit Hilfe dieser Vorzeichenbestimmung steigt man zu Beziehungen zwischen den Größen σ_k $(k=1, 2, 3)$ und den „Überschlagungszahlen"[6]) der Dreiecksseiten auf, *die gerade die Kleinschen Ergänzungsrelationen sind* (§ 5). —

Die Gegendreiecke, auf einer Kugel angenommener parabolischer Membrandreiecke, für die nur eine der Größen σ_i ganzzahlig wird, arten bekanntlich in Punkte oder Zweiecke aus; auch ihnen kommt im Sinne der Theorie der eigentlichen Dreiecke eine einfache *geometrische* Bedeutung zu. Versucht man nämlich die Übergangsdreiecke zwischen den einfach zusammenhängenden und den nicht einfach zusammenhängenden eigentlichen Dreiecken herauszuarbeiten, so findet man, daß die Gesamtheit der Membrandreiecke mit den übrigen eigentlichen sicherlich durch solche in den „falschen Kern" (s. unten!) eingehängten parabolischen Dreiecke zusammenhängt (§ 6). Für diejenigen parabolischen Fälle, bei denen zwei oder mehr Größen σ_i ganze Zahlen werden, existieren von vornherein zwei wesent-

[4]) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", Math. Ann., 37 (1890), S. 573–590.

[5]) Herr Hilb in Würzburg hat mich auf diesen Zusammenhang aufmerksam gemacht.

[6]) Vgl. die Definition der Überschlagungszahl in § 5!

ch verschiedene Dreieckskerne. Auch hier zeigt sich, daß die in den lschen Kern eingehängten Dreiecke sicherlich einen Übergang bilden vischen Membrandreiecken und solchen, in die man keine Fläche einspannen ann.

Die Form der in Gl. (2) auftretenden Quadratwurzel, die man als rodukt von vier Quadratwurzeln schreiben kann, läßt erkennen, daß an en Stellen, an denen zwei oder mehrere Größen σ_i gleichzeitig ganzhlig werden, 4 bzw. 8 bzw. 16 Vorzeichenbestimmungen möglich sind nd deutet daraufhin, daß an diesen Stellen mehr als zwei verschiedene reiecksformen existieren könnten, von denen innerhalb des Kontinuums er Membrandreiecke nur eines einen einfachen Zusammenhang hätte, während die anderen in Grenzfälle zerfallen oder ausarten müßten. Die Durchhrung dieses hier nur angedeuteten Gedankens dürfte keine prinzipielle chwierigkeit bieten. Hieraus würde sich dann noch eine vollständige *ometrische Eingliederung* der Membrandreiecke in die Gesamtheit der gentlichen ergeben.

§ 1.

Die Verzweigungsstellen in den L'Huilierschen Gleichungen. — Erste Aufgabenstellung.

Drei eine gegebene Kugel durchsetzende[7]), durch einen Punkt gehende erade mit ihren Verbindungsebenen schneiden aus der Kugel eine Reihe on Kreisbogendreiecken aus. Das entstandene Dreikant nennen wir mit Klein[8]) den „Kern" dieser Dreiecke, seine Geraden „Achsen", die durch zwei Achsen gelegten Ebenen „Seitenflächen", den gemeinsamen Achsenhnittpunkt „Scheitel" des Kernes.

Die nach der projektiven (Caleyschen) Maßbestimmung mit der gebenen Kugel als Fundamentalfläche gemessenen stets reellen und positiv rausgesetzten Winkel zweier Seitenflächen nennen wir „Winkel", die enso gemessenen Winkel zweier Achsen „Seiten". Bei geeigneter Vergung über diese noch in gewisser Beziehung unbestimmten sechs Größen lten zwischen ihnen die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Ich gehe von einem *bestimmten* Dreieck (d. h. von einer bestimmten inkel- und Seitenkombination an einem bestimmten Kern) aus, für das

[7]) Im Grenzfall können eine oder mehrere Gerade die Kugel berühren. Doch t sich dieser Fall bei stetiger Abänderung ausschließen. Denn zwei benachbarte lle, in denen die kritische Gerade die Kugel durchsetzt, lassen sich immer unter rmeidung des Grenzfalles ineinander überführen.

[8]) Vgl. etwa Klein, „Über die hypergeometrische Funktion", autogr. Vorlesung ttingen (1894), neuer Abdruck Leipzig (1906), (weiterhin zitiert mit „K."), S. 299.

die L'Huilierschen Gleichungen *in der für eigentliche Dreiecke gültigen Form* bestehen und *ändere es stetig so ab*, wobei drei der Größen $\sigma_i (i = 0, 1, 2, 3)$ als unabhängige Veränderliche gelten sollen, *daß diese Gleichungen erhalten bleiben*. Dadurch ist erreicht, daß ich stets im Kontinuum der eigentlichen Dreiecke und im Gültigkeitsbereich der Gl. (2) verbleibe und daß die noch herrschende Unbestimmtheit zunächst behoben ist. Unbestimmtheiten erscheinen erst wieder an den *Verzweigungsstellen* der in den L'Huilierschen Gleichungen auftretenden Quadratwurzel. Verzweigungsstellen liegen dann und nur dann vor, wenn mindestens eine der Größen σ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ eine ganze Zahl wird.

Zur Erleichterung der Ausdrucksweise führe ich folgende *Worterklärung* ein:

„Nimmt bei stetiger Abänderung eine der Größen $\lambda_i, \sigma_i, l_i, s_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ an einer bestimmten Stelle den Wert $\mathfrak{R}$ an und ist sie vor dem Durchgang durch diese Stelle gleich $\mathfrak{R} - \varepsilon_1$, nach dem Durchgang gleich $\mathfrak{R} + \varepsilon_2$, so sage ich, sie *„durchschreitet"* an dieser Stelle den Wert $\mathfrak{R}$; ist sie aber vor dem Durchgang gleich $\mathfrak{R} - \varepsilon_1$, nach dem Durchgang gleich $\mathfrak{R} - \varepsilon_2$, so sage ich, sie *„erreicht"* diesen Wert. Dabei sollen die ε kleine reelle oder rein imaginäre Größen *gleichen* Vorzeichens sein"[9]).

Bildet man aus (2) den Ausdruck:

$$\operatorname{tg} \frac{s_{k+1} + s_{k-1}}{2} \pi, \qquad \left(k = 1, 2, 3; \begin{matrix} 3+1=1 \\ 1-1=3 \end{matrix}\right)$$

so erhält man wegen (1) die Gleichungen[10]):

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = \frac{\cos \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \cos \frac{\sigma_k \pi}{2}}{\sin \frac{\sigma_{k+1} \pi}{2} \cdot \sin \frac{\sigma_{k-1} \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_3 \pi}{2}} \quad (k = 1, 2, 3)$$

und ersieht:

I. *Das Vorzeichen von* $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$ *kann sich nur dann ändern, wenn mindestens eine der Größen* σ_i *eine ganze Zahl durchschreitet*[11]) *(Verzweigungsstelle), und zwar hängt die Änderung oder Nichtänderung wesentlich*

[9]) Ein ε kann reell, das andere rein imaginär sein; es können aber auch beide reell oder beide rein imaginär sein.

[10]) Setzt man in (3) den *vor* der Quadratwurzel stehenden Ausdruck *unter* dieselbe, so erhält man die bekannten Formeln:

$$\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin \sigma_0 \pi \cdot \sin \sigma_k \pi}{\sin \sigma_{k+1} \pi \cdot \sin \sigma_{k-1} \pi}},$$

die aber auch für uneigentliche Dreiecke gelten.

[11]) Stellen, an denen Größen σ_i ganze Zahlen *erreichen*, sollen bei stetiger Veränderung vermieden werden.

on der Festsetzung über das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadrat-urzel nach der Verzweigungsstelle ab.

II. *Eine Dreiecksseite kann nur dann ein ganzes Vielfaches von π urchschreiten — bzw. erreichen —, wenn mindestens eine der Größen σ_i ine ganze Zahl durchschreitet (Verzweigungsstelle), und zwar durchschreitet ie Seite ihren Wert — bzw. erreicht ihn —, je nachdem die Festsetzung ber das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadratwurzel nach dem Durch-ang durch die Verzweigungsstelle so getroffen ist, daß die ganze rechte eite von (3) bei diesem Durchgang das Vorzeichen ändert — bzw. bei-ehält —.*

Dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der nur *eine einzige* röße σ_i eine ganze Zahl durchschreitet, entspricht, wie man aus (3) er-ennt, der Übergang von rein reellen zu bis auf ganze Vielfache von π in imaginären Seiten, also von einem elliptischen zu einem hyperbolischen reieck oder umgekehrt. Zur Verzweigungsstelle selbst gehört ein „einfach rabolisches“ Dreieck, bei dem der Scheitel des Kernes auf die Kugel-berfläche gerückt ist und alle Seiten ganze Vielfache von π werden. Be-üglich dieser Stellen sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. σ_0 ganzzahlig:

Sämtliche Tangenten der halben Seiten werden 0, die Seiten selbst nze Vielfache von 2π. Läßt man bei stetiger Veränderung nach der erzweigungsstelle für die Quadratwurzel beide Vorzeichen zu, so wird die eite $l_k\pi$[12]) ($k = 1, 2, 3$) das eine Mal das ganze Vielfache von 2π durch-hreiten, das andere Mal erreichen.

2. σ_k ($k = 1, 2$ *oder* 3) ganzzahlig:

Es wird in (3)

$$\text{)} \qquad \operatorname{tg}\frac{l_k\pi}{2} = 0; \qquad \operatorname{tg}\frac{l_{k+1}\pi}{2} = \operatorname{tg}\frac{l_{k-1}\pi}{2} = \infty;$$

$$l_k = 2k_1; \quad l_{k+1} = 2k_2 + 1; \quad l_{k-1} = 2k_3 + 1 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ ganze Zahlen}).$$

Wenn man hier durch die Verzweigungsstelle hindurchgeht, so wird nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel die Seite l_k den ert $2k_1\pi$ entweder durchschreiten oder erreichen. —

Dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der *zwei Größen* σ_i ichzeitig ganze Zahlen durchschreiten und der nur eintreten kann, wenn Dreieckswinkel ein ganzes Vielfaches von π wird (Gl. (1)), entspricht r Übergang von einem elliptischen wieder zu einem elliptischen oder

---

[12]) Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, lasse ich den Faktor π bei der nkel- und Seitenbezeichnung weg.

von einem hyperbolischen wieder zu einem hyperbolischen Dreieck. Zwei Typen solcher „doppelt parabolischer" Dreiecke sind zu unterscheiden.

1. σ_0 und σ_k ($k = 1, 2$ *oder* 3) ganzzahlig; λ_k ganzzahlig:

Es ist

$$\text{(4a)} \qquad \operatorname{tg}\frac{l_k\pi}{2} = 0; \quad \operatorname{tg}\frac{l_{k+1}\pi}{2} \text{ und } \operatorname{tg}\frac{l_{k-1}\pi}{2} \text{ unbestimmt.}$$

Die Seite l_k wird je nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel nach dem Durchgang ein ganzes Vielfaches von 2π durchschreiten oder erreichen. Die beiden anderen Seiten werden unbestimmt.

2. σ_{k+1} und σ_{k-1} ($k = 1, 2$ *oder* 3) ganzzahlig; λ_k ganzzahlig.

Man findet: Die Seite $l_k\pi$ wird je nach Bestimmung des Vorzeichens ein *ungerades ganzes* Vielfaches von π durchschreiten oder erreichen, während die beiden anderen Seiten unbestimmt werden. —

Durchschreiten endlich *drei* Größen σ_i gleichzeitig ganze Zahlen, so durchschreitet auch die vierte einen solchen Wert (Gl. (1a)). Diese „Ausnahmedreiecke", bei denen übrigens sämtliche Winkel ganze Vielfache von π werden, vermitteln zwischen zwei elliptischen bzw. zwei hyperbolischen Dreiecken. Sämtliche Tangenten der halben Seiten werden unbestimmt.

Wegen der Stetigkeit der Abänderung kann man im allgemeinen trotzdem schließen, daß je nach Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel nach der Verzweigungsstelle das eine Mal die Seite $l_k\pi$ ein ganzes Vielfaches von π durchschreitet, das andere Mal einen unbestimmten Wert erreicht, ohne ein ganzes Vielfaches von π zu durchschreiten. Pathologische Sonderfälle, bei denen dieser Schluß nicht mehr zulässig wäre, können umgangen werden (§ 3b, Kern II′).

Sämtliche parabolischen Fälle zusammenfassend kann man sagen:

III. *Die Seite* $l_k\pi$ ($k = 1, 2$ *oder* 3) *wird sicherlich dann ein gerades ganzes Vielfaches von* π, *wenn* σ_0, σ_k *oder* σ_0 *und* σ_k, *sicherlich dann ein ungerades ganzes Vielfaches von* π, *wenn* σ_{k+1} *und* σ_{k-1}, *sicherlich dann unbestimmt, wenn sämtliche Größen* σ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) *eine ganze Zahl durchschreiten.*

IV. *Die Seite* $l_k\pi$ *kann dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von* 2π *durchschreiten, wenn* σ_0 *oder* σ_k *oder beide Größen eine ganze Zahl durchschreiten.*

V. *An allen in* III *besprochenen Stellen kann nach* II *das Vorzeichen der L'Huillierschen Quadratwurzel so bestimmt werden, daß die Seite* $l_k\pi$ *ein ganzes Vielfaches durchschreitet oder daß sie das ganze Vielfache von* π *bzw. einen unbestimmten Wert erreicht.*

Umgekehrt kann aus der Kenntnis des Verhaltens der Seite $l_k\pi$ *an*

iner dieser Stellen auf Änderung oder Nichtänderung des Vorzeichens er L'Huilierschen Quadratwurzel beim Durchgang durch diese Stelle eschlossen werden.

Kennt man von einem innerhalb des Kontinuums der eigentlichen reiecke verlaufenden Dreieckskontinuum, dessen Individuen etwa durch Vorabe dreier Größen σ_i oder durch Vorgabe der Winkel *eindeutig* bestimmt nd, das Verhalten der Seiten beim Durchgang durch die parabolischen tellen, so kann man nach III für jedes parabolische Dreieck mindestens ne Seite angeben, aus deren Verhalten (Durchschreiten oder Erreichen ines ganzen Vielfachen von π) man nach V auf das Verhalten des Vorzeichens der L'Huilierschen Quadratwurzel beim Durchgang durch die arabolische Stelle schließen kann, woraus sich eine Vorzeichenbestimmung n den L.'Huilierschen Gleichungen für das betreffende Dreieckskontinuum rgibt.

Aufgabe der folgenden Paragraphen wird es sein, *diese Vorzeichenestimmung für das eindeutige Kontinuum der einfach zusammenhängenden reiecke* (Membrandreiecke) *durchzuführen* und zwar mit Hilfe *geometrischer* erfolgung der Durchgänge dieses Kontinuums durch die parabolischen tellen.

Zur Erreichung der für diese geometrische Betrachtung notwendigen indeutigkeit in der projektiven Maßbestimmung bei stetiger Verzerrung edarf es einer Festsetzung, wie sie implizite den Kleinschen Unterchungen zugrunde liegt, die so getroffen ist, daß folgende *Regeln* gelten:

1. Wird ein Winkel ein ganzes Vielfaches von π, so *durchschreitet* er diesen Wert *dann und nur dann*, wenn die ihn einschließenden Seitenflächen des Kernes durcheinander hindurchgehen.

2. Wird eine Seite ein ungerades ganzes Vielfaches von π, so *durchschreitet* sie diesen Wert *dann und nur dann*, wenn ihre eine Ecke über den Gegenpunkt der anderen hinweggleitet.

2a. Wird eine Seite ein gerades ganzes Vielfaches von π, so *durchschreitet* sie diesen Wert *dann und nur dann*, wenn ihre eine Ecke über die andere hinweggleitet.

D. h., daß im ersten Falle der Winkel der beiden Seitenflächen, im weiten der der beiden Achsen des Kernes auch im gewöhnlichen (euklischen) Maß ein ganzes Vielfaches von π gerade *durchschreitet*.

§ 2.

Durchgang durch die einfach parabolischen Membrandreiecke.

Die Achsen eines gegebenen Dreieckskernes bezeichne ich mit A_1, A_2, A_3. on den beiden Schnittpunkten der Achse A_1 mit der Kugel wähle ich

denjenigen aus, der beim stetigen Durchgang durch das zu untersuchende *einfach parabolische Membran*dreieck nicht in den auf die Kugeloberfläche rückenden Scheitel des Kernes hineinfällt, und nenne ihn S. Dann lege ich an die Kugel eine Ebene an, die in dem S diametral gegenüberliegenden Kugelpunkt berührt und projiziere Achsen und Kugeloberfläche — die letzte *stereographisch* — von S aus auf die Ebene.

Je nachdem der Scheitel des Kernes innerhalb (elliptischer), auf (parabolischer) oder außerhalb (hyperbolischer Fall) der Kugeloberfläche liegt, erhält man in der Ebene Figuren vom Typus 1a, 1b oder 1c. Für den ersten ist die Summe der eingezeichneten Hilfswinkel $\alpha_k\,(k = 1, 2, 3) > \pi$, für den zweiten $= \pi$, für den dritten $< \pi$.

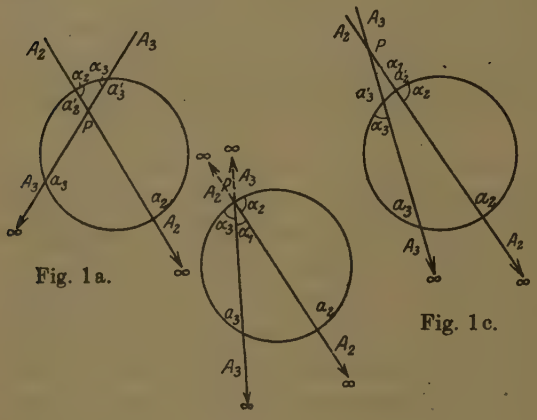

Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 1c.

Die Punkte P sind in allen Figuren die Projektionen des Scheitels, die Geraden A_2 und A_3 die der Achsen A_2 und A_3, deren Ebene die Seite l_1 aus der Kugel ausschneidet. Die Projektionen der Achse A_1 sind an den Figuren nicht eingetragen.. Die Seite l_1 wird auf die eingezeichneten Kreise, die Seiten l_2 und l_3 auf die Geraden A_3 und A_2 projiziert. Die Projektionen der Dreieckswinkel lassen sich ebenfalls leicht angeben Da eine stereographische Projektion vorliegt, so gestattet die projektive Maßbestimmung die Maßzahlen der Dreieckswinkel unmittelbar an den Figuren abzulesen.

Es ist offenbar möglich, für jeden nicht vermeidbaren und nicht der Umgebung einer höheren parabolischen Stelle angehörenden Dreieckstypus einen Repräsentanten an einer der drei Figuren anzugeben.

Läßt man die an den Figuren 1a und 1c zu erklärenden Dreiecke stetig ineinander übergehen, so kann man das Verhalten der Seite l_1 beim Durchgang durch den parabolischen Fall der Fig. 1b verfolgen und erkennt aus Regel 2b des vorigen Paragraphen:

Bei Durchlaufung eines einfach parabolischen Dreiecks durchschreitet die Seite l_1 eines Membrandreiecks dann und nur dann ein gerades ganzes Vielfaches von π, wenn ihre beiden Ecken[13]) *in den Punkt P hineinrücken, während sie diesen Wert dann und nur dann erreicht, wenn ihre Ecken a_2 und a_3 werden.*

Daß das bei eigentlichen Dreiecken immer dann möglich ist, wenn der Größen σ_0 oder σ_1 eine ganze Zahl durchschreitet, folgt aus III. Wir untersuchen daher alle Typen „reduzierter", einfach parabolischer mbrandreiecke, für die σ_0 oder σ_1 ganzzahlig wird. Sie sind sämtlich Fig. 1b zu erklären. Es handelt sich um die Dreiecke mit den nkeln:

1a. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	1b. $2-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3$
2. $\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3$	3. $1-\alpha_1, \alpha_2, 1+\alpha_3$
4. $2-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	5. $2+\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3$ [14])

Das Dreieck 5. ist kein reduziertes, muß aber hinzugenommen werden, mit sämtliche Typen einfach zusammenhängender Membrandreiecke aus sen Grunddreiecken allein durch die Prozesse der lateralen und polaren nängungen von Halbkugelflächen erzeugt werden können[15]).

In den Fällen 1 durchschreitet σ_0 eine ganze Zahl:

Die Ecken der Seite l_1 sind a_2 und a_3, die dritte Ecke liegt im Unlichen. Bei lateralen und polaren Anhängungen an eine der drei Seiten ibt σ_0 eine ganze Zahl, die Ecken der Seite l_1 bleiben — wie stets bei sen Prozessen — erhalten. Man folgert, daß die Seite l_1 beim Durchgang rch solche parabolischen Stellen das ganze Vielfache von 2π *stets erht*, während σ_0 eine ganze Zahl durchschreitet. —

In den Dreiecken 2. und 3. durchschreitet σ_1 den Wert 0:

Die Ecken von l_1 liegen in a_2 und a_3, die dritte Ecke in P. Bei eralen Anhängungen an l_1 wird σ_1 eine negative ganze Zahl, polare Angungen an diese Seite würden den einfachen Zusammenhang des Dreis stören, weil die Ecke P dann auf der gegenüberliegenden Seite l_1 en würde, sind also auszuschließen. Laterale Anhängungen an die beiden ern Seiten ändern den Wert von σ_1 nicht, bei polaren Anhängungen eine dieser Seiten erhält σ_1 einen negativ ganzzahligen Wert. Da bei n diesen Dreiecken die Seite l_1 die Ecken a_2 und a_3 beibehält, so *erht* sie beim Durchgang stets das ganze Vielfache von 2π (Gl. (4)), rend σ_1 den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet. —

Es bleiben noch die Fälle 4 und 5 (Fig. 2 und 3 — in Fig. 3 ist der *pelt* überdeckte Teil der Ebene schraffiert —); σ_1 durchschreitet den rt $+1$:

---

[13]) Ich spreche der Bequemlichkeit halber von den „Ecken" statt von den „Pronen der Ecken".

[14]) K. S. 404. Figuren zu diesen Dreiecken befinden sich z. B. bei Schilling, h. Ann., 44 (1894), S. 219; Van Vleck, Trans. Am. Math. Soc. 3 (1902), S. 121; K. S. 405.

[15]) K. S. 423f. Wenn ich hier von „reduzierten" Dreiecken spreche, so schließe das Dreieck 5 nicht aus.

Die Ecken der Seite l_1 rücken in P zusammen. Laterale Anhängungen an die Seite l_1 sind nicht möglich, weil sie sich gerade schließt; ebensowenig polare Anhängungen an die beiden übrigen Seiten, die mit Rücksicht auf die sich schließende Seite den einfachen Zusammenhang unterbrechen würden. Polare Anhängungen an l_1 vermehren σ_1 um eine positive ganze Zahl, laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten ändern den Wert von σ_1 nicht. D. h.: Bei Durchlaufung aller Dreiecke dieses Falles durchschreitet einerseits l_1 ein ganzes Vielfaches von 2π, weil die beiden Ecken nach P hineingerückt sind, anderseits σ_1 eine *positive* ganze Zahl. Umgekehrt sind alle einfach parabolischen Dreiecke, bei denen σ_1 eine positive ganze Zahl durchschreitet, in den vorliegenden Fällen enthalten, da sich zeigte, daß in allen anderen einfach parabolischen Dreiecken, in denen σ_1 eine ganze Zahl durchschritt, diese Zahl 0 oder negativ war. —

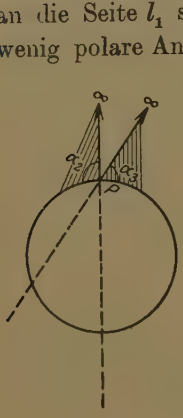

Fig. 2.

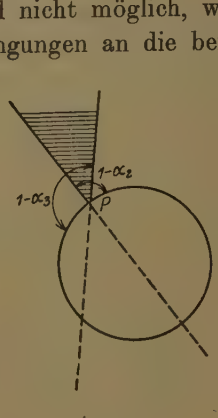

Fig. 3.

In leichter Zusammenfassung und Verallgemeinerung folgt unter Berücksichtigung von III:

VI. *Beim Durchgang durch ein einfach parabolisches Dreieck durchschreitet die Seite $l_k\pi$ sicherlich dann ein ganzes Vielfaches von π, wenn σ_k eine positive ganze Zahl durchschreitet und erreicht einen solchen Wert sicherlich dann, wenn σ_0 eine ganze Zahl oder σ_1 den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet.*

Und in Hinblick auf IV:

VII. *Beim Durchgang durch ein einfach parabolisches Membrandreieck durchschreitet die Seite $l_k\pi$ dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von 2π, wenn σ_k eine positive ganze Zahl durchschreitet.*

§ 3.

Durchgang durch die höheren parabolischen Membrandreiecke.

a) Doppeltparabolische Dreiecke.

Beim Durchgang durch ein doppeltparabolisches Dreieck, bei dem etwa σ_0 und σ_1 oder σ_2 und σ_3 ganze Zahlen durchschreiten, wird jedenfalls ein Winkel — hier λ_1 — eine ganze Zahl. Je nachdem λ_1 die ganze

l durchschreitet oder erreicht[16]), hat man zwei verschiedene Dreiecksne zu unterscheiden.

Im Kern I (λ_1 *durchschreitet* eine ganze Zahl) fallen die beiden den nkel λ_1 einschließenden Seitenflächen nach Regel 1 (§ 1) zusammen und er auch die Achsen A_2 und A_3. Die dritte Achse neidet die Kugel in zwei getrennt liegenden Punk-[17]), von deren einem, der jedenfalls nicht Scheitel Kernes sein soll, projizieren wir wie oben Kern und geloberfläche (Fig. 4). Die Seite l_1 projiziert sich auf gezeichneten Kreis, die Achsen A_2 und A_3 sowie die en l_3 und l_2 auf die Gerade A. Die Projektion des estimmten Achsenschnittpunktes können wir beliebig der Strecke $a_2 a_3$ — also etwa in P — wählen.

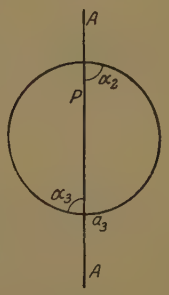

Fig. 4.

Es sind reduzierte Dreiecke möglich mit den Winzahlen:

$$1.\ 1, \alpha_2, 1-\alpha_3; \qquad 2.\ 2, \alpha_2, \alpha_3 \qquad (\alpha_2 + \alpha_3 = 1).$$

Durchläuft man ein zum ersten dieser reduzierten Dreiecke gehörendes ieck, so wird die Seite l_1 ein ungerades ganzes Vielfaches von π durchreiten; σ_2 und σ_3 durchschreiten im reduzierten Fall den Wert 0. Hängt n an l_1 polar an, so durchschreiten σ_2 und σ_3 negative ganze Zahlen, erale Anhängungen an diese Seiten lassen σ_2 und σ_3 ungeändert. Polare l laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten gestattet der gederte einfache Zusammenhang der Figuren nicht. In allen diesen Dreien durchschreitet σ_2 und σ_3 den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl.

Bei Durchlaufung der zum reduzierten Dreieck 2 gehörenden Membraniecke wird stets die Seite l_1 ein ganzes Vielfaches von 2π (Gl. (4a)) *durchreiten*, die beiden anderen Seiten aber keine ganzen Vielfachen von π chschreiten. Im reduzierten Dreieck selbst werden σ_0 und σ_1 gleich $+1$. are Anhängungen an l_2 ergeben positiv ganzzahlige Werte von σ_0 und während laterale Anhängungen an die beiden anderen Seiten σ_0 größere itive ganze Zahlen annehmen und σ_1 unverändert lassen. Laterale Angungen an l_1 und polare an l_2 und l_3 sind unzulässig. Bei allen diesen iecken durchschreitet σ_1 eine *positive* ganze Zahl. —

Im Kern II (λ_1 *erreicht* eine ganze Zahl) sind die Achsen A_2 und A_3

---

[16]) Im ersten Falle ändern sich die ganzzahlig werdenden σ gleichsinnig, im iten gegensinnig; daraus läßt sich folgern, daß die ersten Dreiecke zwei elliptische, letzten zwei hyperbolische miteinander verbinden.

[17]) Von den unter b) zu behandelnden Ausnahmedreiecken kann hier abgesehen den.

nicht zusammenfallend. Die Achse A_1 berührt die Kugel[18]). Wir projizieren von dem Berührungspunkt der Achse A_1 auf die in dem diesem diametral gegenüberliegenden Punkt berührende Ebene (Fig. 5). Die Projektion der Seite l_1 erscheint auf der Geraden B, die der Achsen A_2 und A_3 sowie der Seiten l_3 und l_2 auf den Geraden A_2 und A_3, die des gemeinschaftlichen Achsenschnittpunktes im Unendlichen, also auch auf der Geraden B.

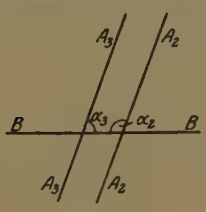

Fig. 5.

Für diesen Kern existieren reduzierte Membrandreiecke mit den Winkeln:

$$3.\ 0, \alpha_2, \alpha_3; \qquad 4.\ 0, 1-\alpha_2, 1+\alpha_3 \qquad (\alpha_2+\alpha_3=1).$$

Im dritten Dreieck liegen die Ecken der ganzzahligen Seite l_1 getrennt in a_2 und a_3, die dritte Ecke im Unendlichen; σ_0 und σ_1 sind gleich 0. Polare Anhängungen an l_1 sind nicht möglich, weil die gegenüberliegende unendlich ferne Ecke dann auf der Seite selbst liegen würde. Laterale Anhängungen an l_1 und polare an l_2 oder l_3 machen σ_1 zu einer negativen, σ_0 zu einer positiven ganzen Zahl; laterale Anhängungen an l_2 oder l_3 würden σ_1 unverändert lassen, während σ_0 eine positive ganze Zahl würde. Die Ecken von l_1 bleiben getrennt: Bei Durchlaufung solcher Dreiecke *erreicht* die Seite l_1 ein ganzes Vielfaches von 2π. —

Im Dreieck 4 (Fig. 6) durchschreitet σ_2 den Wert 0, σ_3 den Wert $+1$; die Ecken der Seite l_1 liegen getrennt in a_3 und im Unendlichen, die dritte Ecke ebenfalls im Unendlichen. Polare Anhängungen sind nur an l_3 möglich, wobei σ_3 positiv ganzzahlig bliebe, während σ_2 negativ ganzzahlig würde. Laterale Anhängungen an l_3 sind auszuschließen, an l_1 und l_2 würden σ_3 unverändert lassen, während σ_2 negative ganze Zahlen annähme oder unverändert bliebe. Bei Durchlaufung dieser Dreiecke, bei denen σ_2 den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl, σ_3 eine positive ganze Zahl durchschreitet, läßt sich über das Verhalten der Seite l_1 nicht ohne weiteres etwas aussagen; dagegen *durchschreitet* die nach § 1 unbestimmte Seite l_3 ein ganzes Vielfaches von 2π.

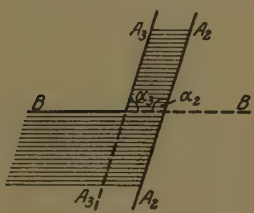

Fig. 6.

Zusammenfassend folgert man in einfacher Verallgemeinerung der Resultate, wobei III bzw. IV zu berücksichtigen ist:

---

[18]) Nach Anm. [7]) könnten wir diesen Kern bei stetiger Abänderung ausschließen. Die Betrachtung dieses Kernes ist jedoch für die Erörterungen des § 6 wesentlich. Die Schlüsse der beiden folgenden Paragraphen würden sich aber auch ohne Berücksichtigung der Kerne II und II′ durchführen lassen.

VIII. *Beim Durchgang durch ein doppeltparabolisches Membran-ieck durchschreitet die Seite $l_k \pi$ sicherlich dann ein ganzes Vielfaches π, wenn σ_k oder λ_k oder beide eine positive ganze Zahl durchschreiten l erreicht einen solchen Wert sicher dann, wenn σ_k den Wert 0 oder e negative ganze Zahl durchschreitet.*

IX. *Beim Durchgang durch ein doppeltparabolisches Membran-ieck durchschreitet die Seite $l_k \pi$ dann und nur dann ein ganzes Viel-hes von 2π, wenn σ_k eine positive ganze Zahl durchschreitet.*

b) Ausnahmedreiecke.

In den Ausnahmefällen, in denen sämtliche σ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ ganze ılen durchschreiten und in denen sämtliche Winkel ganze Vielfache π werden, sind zwei Typen von Kernen auseinanderzuhalten[19]).

Im Kern I′ fallen sämtliche Seitenflächen zusammen, sämtliche Winkel chschreiten ganze Vielfache von π; die Achsen des Kernes werden un-timmt, liegen aber in einer Ebene. Fig. 7 zeigt den nitt dieser Ebene mit der Kugel. Es gibt nur *ein* uziertes Membrandreieck, in dem sämtliche Winkel den rt π, σ_0 den Wert 1, die Größen $\sigma_k (k = 1, 2, 3)$ den rt 0 durchschreiten. Bei den nur möglichen lateralen ıängungen erhält man für σ_k $(k = 1, 2, 3)$ nur den rt 0 oder negative ganze Zahlen.

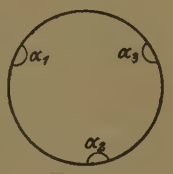

Fig. 7.

Die Seite l_k $(k = 1, 2, 3)$ erreicht in allen Fällen einen unbestimmten rt, ohne ein ganzes Vielfaches von π zu durchschreiten.

Im Kern II′ fallen zwei Seitenflächen zusammen, die dritte schneidet se längs einer Tangente an die Kugel. Zwei Achsen des Kernes — a A_2 und A_3 — fallen in diese Tangente[18]), dritte Achse und Scheitel Kernes sind unbestimmt. Fig. 8 stellt eine Projektion des Dreieckes die zusammenfallenden Seitenflächen dar. Auch hier gibt es nur *ein* uziertes Dreieck, bei dem der Winkel λ_1 den Wert π chschreitet, die Winkel λ_2 und λ_3 den Wert 0 erreiı; σ_0, σ_2 und σ_3 durchschreiten den Wert 0, σ_1 den rt $+1$. Die Ecken der Seite l_1 und deren Gegenpunkte en in P zusammen. Polare Anhängungen an l_1 verffen der Größe σ_1 stets positiv ganzzahlige Werte; lateralen Anhängungen an die beiden anderen Seiten bt σ_1 unverändert, σ_2 und σ_3 behalten den Wert 0 oder werden nega-ganze Zahlen. Polare Anhängungen an l_2 oder l_3, laterale an l_1 sind t möglich. Die Seite l_1 durchschreitet nach Regel 2a und 2b (§ 1) *so-*

Fig. 8.

[19]) Vgl. etwa K. S. 431 f.

wohl ein ungerades als auch ein gerades ganzes Vielfaches von π, weil beim Durchgang eine Ecke sowohl über die andere als auch über deren Gegenpunkt hinweggleitet.

Wir fassen auf Grund von III bzw. IV zusammen:

X. *Beim Durchgang durch ein Ausnahmedreieck, in das man eine Membran einspannen kann, durchschreitet die Seite* $l_k\pi$ *sicherlich dann ein ganzes (ungerades oder auch gerades) Vielfaches von* π, *wenn der Winkel* $\lambda_k\pi$, *nicht aber die Winkel* $\lambda_{k+1}\pi$ *und* $\lambda_{k-1}\pi$ *ein ganzes Vielfaches von* π *durchschreiten, und erreicht einen unbestimmten Wert sicherlich dann, wenn alle Winkel ganze Vielfache von* π *durchschreiten.*

XI. *Beim Durchgang durch ein Ausnahmedreieck, in das man eine Membran einspannen kann, durchschreitet die Seite* $l_k\pi$ *dann und nur dann ein ganzes Vielfaches von* 2π, *wenn* σ_k *eine positive ganze Zahl durchschreitet.*

Aus Regel 1 (§ 1) folgt, daß ein Dreieckswinkel λ_k nur dann ein ganzes Vielfaches von π durchschreiten kann, wenn die beiden ihn einschließenden Seitenflächen des Kernes im kritischen Dreieck zusammenfallen. In keinem der zu Fig. 1a, 1b oder 1c gehörigen Dreiecke fallen zwei Seitenflächen zusammen. Das ganzzahlige Vielfache von π wird also von dem Winkel $\lambda_k\pi$ stets in einem doppeltparabolischen oder Ausnahmedreieck durchschritten, und zwar kommen hierfür nur die Kerne I, I′ oder II′ in Frage:

XII. *Durchschreitet ein Winkel* $(\lambda_k\pi)$ *ein ganzes Vielfaches von* π, *so liegt sicherlich ein doppeltparabolisches oder Ausnahmedreieck vor*[20]).

§ 4.

Vorzeichenbestimmung für das Kontinuum der Membrandreiecke in den L'Huilierschen Gleichungen.

Aus II, V, VI, VIII, X und XII folgt, *wenn man die vermeidbaren Fälle des Kernes* II′ *ausschaltet*:

XIII. *An den innerhalb des Kontinuums der Membrandreiecke ge-*

---

[20]) Aus diesem Resultat folgt, daß sich die in die Kerne I und I′ einzuhängenden Dreiecke bei stetiger Verzerrung jedenfalls nicht sämtlich vermeiden lassen. Wie man unten (Anm. [25]) erkennt, lassen sich nicht einmal die zu I′ gehörenden Dreiecke vermeiden. Die Vermeidbarkeit der zu den Kernen II und II′ und die Unvermeidbarkeit der zu den Kernen I und I′ gehörenden Dreiecke gewinnt in der Theorie der hypergeometrischen Funktion insofern eine gewisse Bedeutung, als daraus folgt, daß „Ausnahmestellen 1. Ordnung", bei denen in den Entwickelungen logarithmische Glieder auftreten, bei stetiger Änderung ausgeschlossen werden können, während das bei „Ausnahmestellen zweiter Ordnung", wo die logarithmischen Glieder wieder hinausfallen, nicht mehr der Fall ist.

enen Verzweigungsstellen ändert der Ausdruck $\operatorname{tg}\frac{l_k\pi}{2}$ *sein Vorzeichen herlich dann, wenn*

1. σ_k *eine positive ganze Zahl durchschreitet,*
2. λ_k *eine (positive) ganze Zahl durchschreitet, ohne daß* λ_{k+1} *und* λ_{k-1} *gleichzeitig dasselbe tun,*
3. σ_k *und* λ_k *gleichzeitig positive ganze Zahlen durchschreiten.*

behält sein Vorzeichen sicherlich dann bei, wenn

4. σ_0 *eine ganze Zahl durchschreitet,*
5. σ_k *den Wert 0 oder eine negative ganze Zahl durchschreitet,*
6. $\lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_{k-1}$ *gleichzeitig ganze Zahlen durchschreiten*[21]);

nn mehrere dieser letzten Ereignisse gleichzeitig eintreten, so bleibt das rzeichen ebenfalls ungeändert.

Lassen wir hier k der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 annehmen, so nnen wir für jede nicht ausgeschlossene Verzweigungsstelle mindestens e Seite $l_\tau\pi$ $(\tau = 1, 2, 3)$ angeben, von der wir wissen, ob sich das Vorchen von $\operatorname{tg}\frac{l_\tau\pi}{2}$ ändert oder nicht; daraus folgt sofort die fragliche rzeichenbestimmung an allen nicht umgangenen Verzweigungsstellen.

Um für dieses Vorzeichen einen expliziten Ausdruck anzugeben, setzen es

$$\delta = \eta_0 \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta''',$$

bei die 4 Größen η *ganzzahlige* Funktionen der σ_i bzw. λ_k $(i = 0, 1, 2, 3;$ $= 1, 2, 3)$ sind, die nur der Werte $+1$ und -1 fähig sind, und unterhen das Vorzeichen (δ_k) von $\operatorname{tg}\frac{l_k\pi}{2}$; es ist nach (3):

$$\delta_k = (-1)^{\left[\frac{\sigma_0+1}{2}\right]+\left[\frac{\sigma_k+1}{2}\right]+\left[\frac{\sigma_{k+1}}{2}\right]+\left[\frac{\sigma_{k-1}}{2}\right]} \cdot \eta_0 \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta'''$$ [22]).

Setzt man

$$\eta_0 = (-1)^{\left[\frac{\sigma_0+1}{2}\right]+\sum_{n=1}^{3}\left[\frac{\sigma_n+1}{2}\right]+\varrho} \qquad (\varrho = 0 \text{ oder } 1).$$

ergibt sich

$$\delta_k = (-1)^{[\sigma_{k+1}]+[\sigma_{k-1}]+\varrho} \cdot \eta' \cdot \eta'' \cdot \eta''',$$

l

$$(-1)^{\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]} = (-1)^{[x]}$$

und es ist erreicht, daß sich dieses Vorzeichen in allen Fällen XIII

[21]) Aus dem Erfülltsein von 6. folgt übrigens ohne weiteres das Erfülltsein von 4.
[22]) $[x]$ = größte ganze Zahl *unter* x.

dann ändert oder nicht ändert, wenn das Produkt $\eta' \cdot \eta'' \cdot \eta'''$ es umkehrt oder beibehält.

Setzt man ferner

$$\eta' = (-1)^{\sum_{n=1}^{3} E(\sigma_n)} \quad (8)$$ [23])

und

$$\eta'' = (-1)^{\sum_{n=1}^{3} [\lambda_n]} = (-1)^{\sum_{n=1}^{3} E(\lambda_n)}, \quad (9)$$

so erkennt man, daß sich das Produkt $\eta' \cdot \eta''$ in den Fällen 1, 2, 4 und 5 von XIII für alle Werte von k bezüglich des Vorzeichens so verhält, wie sich auch δ_k verhalten soll, daß es sich aber im Falle 3 und 6 umgekehrt verhält, wie es von δ_k verlangt wird.

Es erübrigt noch η''' so zu bestimmen, daß es sich in diesen beiden Fällen für alle Werte von k ändert, sonst aber unverändert bleibt.

Die Funktion

$$\eta''' = (-1)^{E\left(\frac{[\lambda_1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right)} \quad (10)$$ [24])

kann sich nur ändern, wenn mindestens eine der Größen λ_k $(k = 1, 2, 3)$ eine ganze Zahl durchschreitet, wenn also nach XII ein doppeltparabolischer oder Ausnahmefall vorliegt. Eine Nachprüfung sämtlicher Dreiecke des § 3 ergibt, daß η''' sich *dann und nur dann* ändert, wenn ein zum reduzierten doppelt parabolischen Dreieck 2 (§ 3a) oder zum Ausnahmedreieck des Kernes I′ (§ 3b) gehörendes Dreieck durchlaufen wird. *Das sind aber gerade die beiden kritischen Fälle* 3 und 6 [25]).

Die noch unbestimmte Zahl ϱ in (6) folgt aus der Betrachtung des (natürlich einfach zusammenhängenden) Elementardreiecks, dessen sämtliche Winkel und Seiten $\frac{\pi}{2}$ und für das sämtliche Größen σ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ gleich $\frac{1}{4}$ sind. Hier ist nach (6) bis (10)

$$\delta = (-1)^{\varrho}$$

---

[23]) $E(x)$ = größte ganze Zahl *unter* x für $x > 1$
$= 0$ für $x \leq 1$.

[24]) Die im Exponenten stehende Funktion gibt im wesentlichen die Anzahl der lateralen und polaren Anhängungen an, die man am zugehörigen reduzierten Dreieck vornehmen muß, um das Dreieck $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ zu erhalten.

[25]) Würde man an Stelle von η''' den Ausdruck $(-1)^{\sum E\left(\frac{\lambda_n - [\lambda_{n+1}] - [\lambda_{n-1}]}{2}\right)}$ setzen, so würde der Fall 3 dadurch Erledigung finden; der Fall 6 aber nicht. Daraus folgt, daß die Annahme, daß alle Ausnahmefälle, bei denen allein der Fall 6 auftreten kann, bei stetiger Verzerrung vermeidbar sind, zu einem Widerspruch führen würde. (Vgl. Anm. [20]).

nd, da das Vorzeichen der L'Huilierschen Quadratwurzel für Elementar-reiecke positiv ist,

1) $$\varrho = 0.$$

Es folgt definitiv als Vorzeichen der Quadratwurzel in den L'Huilierschen leichungen für Membrandreiecke aus (6) bis (11)

2) $$\delta = (-1)^{\left[\frac{\sigma_0+1}{2}\right] + E\frac{[\lambda_1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2} + \sum_{n=1}^{3}\left\{\left[\frac{\sigma_n+1}{2}\right] + E(\sigma_n) + E(\lambda_n)\right\}}.$$

o man noch für die Größen λ_k $(k = 1, 2, 3)$ die Größen σ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ s (1) einführen könnte oder umgekehrt.

§ 5.

Ergänzungsrelationen.

Unter „Überschlagungszahl" einer Dreiecksseite verstehe ich diejenige hl, die angibt, wie oft mindestens die Seite ein ganzes Vielfaches von π durchschritten haben muß, wenn das Dreieck durch stetige Verzerrung s einem Elementardreieck entstanden ist.

Bei Einführung dieser Ausdrucksweise lassen sich die Sätze IV, VII, X und XI zusammenfassen in:

XIV. *Die Seite l_k eines Membrandreiecks ändert dann und nur dann re Überschlagungszahl, wenn σ_k eine positive ganze Zahl durchschreitet.*

Um von der im vorigen Paragraphen geleisteten Vorzeichenbestimmung den L'Huilierschen Gleichungen zu den Kleinschen „Ergänzungs-ationen", die Beziehungen zwischen den Überschlagungszahlen und den ößen σ_k $(k = 1, 2, 3)$ sind, aufzusteigen, untersuchen wir den Sinn des rchgangs der Seite $l_k\pi$ durch ein ganzes Vielfaches von 2π, wobei dann o σ_k eine positive ganze Zahl durchschreitet.

Für das Vorzeichen von $\operatorname{tg}\frac{l_1\pi}{2}$ erhält man aus (5), (6) und (12):

3) $$\delta_1 = (-1)^{[\sigma_2]+[\sigma_3]+E(\sigma_1)+E(\sigma_2)+E(\sigma_3)+[\lambda_1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+E\left\{\frac{[\lambda_1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right\}}.$$

σ_1 möge die ganze Zahl k_1 *wachsend* durchschreiten; an der Ver-eigungsstelle selbst bzw. unmittelbar vorher ist dann, wie leicht zu sehen:

$$[\sigma_2] = -k_1 + [1 - \lambda_3],$$
$$[\sigma_3] = -k_1 + [1 - \lambda_2],$$
$$E(\sigma_1) = k_1 - 1,$$
$$E(\sigma_2) = E(\sigma_3) = 0,$$
$$[\lambda_1] = 2k_1 + [\lambda_2 + \lambda_3 - 1],$$
$$[\lambda_2] = [\lambda_2],$$
$$[\lambda_3] = [\lambda_3],$$

$$E\left(\frac{[\lambda_1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right) = E\frac{1+2k_1+[\lambda_2+\lambda_3-1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]}{2}$$
$$= k_1 + \left[\frac{[\lambda_2+\lambda_3-1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right].$$

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich das Vorzeichen von $\operatorname{tg}\frac{l_1\pi}{2}$ unmittelbar vor dem Durchgang durch die Verzweigungsstelle aus (13):

$$(14)\quad \sigma_1 = (-1)^{[1-\lambda_2]+[1-\lambda_3]-1+[\lambda_2+\lambda_3-1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+\left[\frac{[\lambda_2+\lambda_3-1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right]}.$$

Faßt man im Exponenten die Ausdrücke

$$[1-\lambda_2]+[1-\lambda_3] \quad \text{und} \quad [\lambda_2+\lambda_3-1],$$

ferner

$$[\lambda_2]+[\lambda_3] \quad \text{und} \quad \left[\frac{[\lambda_2+\lambda_3-1]+[\lambda_2]+[\lambda_3]+1}{2}\right]$$

zusammen, wobei zu berücksichtigen ist, daß

$$[1-x] = -[x]$$

ist. so ergibt (14):

$$\sigma_1 = (-1)^{-1+[\lambda_2-[\lambda_2]+\lambda_3-[\lambda_3]-1]+\left[\frac{[\lambda_2-[\lambda_2]+\lambda_3-[\lambda_3]-1]+1}{2}\right]}.$$

Aus den §§ 2 und 3 findet man, daß in der Nähe einer Stelle. an der σ_1 positiv ganzzahlig ist, die Ungleichungen:

$$0 < \lambda_2 - [\lambda_2] < 1,$$
$$0 < \lambda_3 - [\lambda_3] < 1$$

gelten, und folglich auch

$$-1 < \lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1 < 1$$

ist. Der Ausdruck

$$\varphi = [\lambda_2 - [\lambda_2] + \lambda_3 - [\lambda_3] - 1]$$

kann nur die Werte -1 und 0 annehmen.

Ist φ gleich -1, so ist auch

$$\left[\frac{\varphi+1}{2}\right] = -1,$$

und ist φ gleich 0, so ist auch

$$\left[\frac{\varphi+1}{2}\right] = 0,$$

weswegen man erhält:

$$\sigma_1 = (-1)^{-1} = -1,$$

d. h.:

Vor dem Durchgang durch eine Verzweigungsstelle, an der σ_1 *wachsend* eine positive ganze Zahl durchschreitet, hat die Seite $l_1\pi$ einen Wert $2k\pi - \varepsilon_1$, nach dem Durchgang einen Wert $2k\pi + \varepsilon_2$, wobei k eine ganze

l, ε_1 und ε_2 kleine *positive* reelle oder rein imaginäre Größen sind; die erschlagungszahl *wächst* beim Durchgang. Verallgemeinert:

XV *Durchschreitet* σ_k *eine positive ganze Zahl, so wächst die Überlagungszahl der Seite* $l_k\pi$ *eines Membrandreiecks mit wachsendem* σ_k *l nimmt ab mit abnehmendem* σ_k.

Bezeichnet man die Überschlagungszahl der Seite $l_k\pi$ mit u_k und chtet, daß in einem *Elementardreieck*

$$E(\sigma_1) = E(\sigma_2) = E(\sigma_3) = 0; \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

so folgt aus den Sätzen XIV und XV:

)
$$u_k = E(\sigma_k) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Das sind gerade die Kleinschen Ergänzungsrelationen.

§ 6.

Parabolische Dreiecke.

Zu jedem Membrandreieck, das in den elliptischen oder hyperbolischen rn einzuhängen ist, läßt sich am gleichen Kern ein zweites, ebens einfach zusammenhängendes, finden mit den nämlichen Maßzahlen Winkel und Seiten, das aber die umgekehrte Ecken-ge[26]) hat, wie das erste (Gegendreieck): z. B. an Fig. 1a r 1c zum Dreieck $\infty a_2 a_3$ mit den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Dreieck $Pa_3' a_2'$ mit den Winkeln $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$. Dasselbe für die doppeltparabolischen Membrandreiecke. Beim *fachparabolischen* Dreieck ist dies nicht mehr mög-[27]); hier ist die Eckenfolge für das *Membran*dreieck ert durch die Vorgabe der Winkel und es bedarf zur lärung des Dreiecks mit umgekehrter Eckenfolge der führung eines neuen zum ursprünglichen symmetrisch enden Kernes (Fig. 9). In der Tat tritt bei *diesem* rn ein Membrandreieck mit den Ecken $\infty a_3 a_2$ und den keln $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$ auf. Das gleiche findet man für alle übrigen reduzier- und nicht reduzierten einfachparabolischen Membrandreiecke.

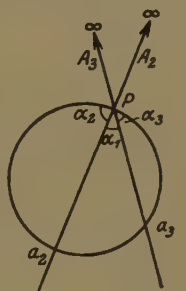

Fig. 9.

Versucht man aber dennoch das Dreieck mit der verkehrten Eckenfolge den ursprünglichen Kern einzuhängen, so würde die Figur ein *aus-tetes* Dreieck darstellen; in dem angeführten Spezialfall z. B. würden Ecken des Dreiecks in den Punkt P hineinrücken. Würde man in

[26]) Die Eckenfolge ist so bestimmt, daß bei Umlaufung des Dreiecks im Sinne Eckenfolge die Dreiecks*fläche* zur Linken liegt.

[27]) Vgl. etwa K., S. 411.

dieser Weise alle in § 2 besprochenen einfachparabolischen Dreiecke in den „falschen Kern“ einhängen, so würde sich herausstellen, daß die beiden Ecken der Seite l_1 stets dann in den Punkt P hineinrücken, wenn sie bei dem in den „richtigen Kern“ eingehängten *nicht* in P liegen und umgekehrt.

Daraus folgt, daß sich beim Durchgang durch ein in den „falschen Kern“ eingehängtes — also ausgeartetes — einfachparabolisches Dreieck, für das σ_0 oder eine der Größen σ_k $(k = 1, 2, 3)$ eine ganze Zahl durchschreitet, die Überschlagungszahl der Seite l_k immer dann ändert, wenn sie sich beim Durchgang durch das richtig eingehängte nicht ändert und umgekehrt.

Die in die beiden verschiedenen zueinander symmetrisch liegenden einfachparabolischen Kerne eingehängten Dreiecke mit verschiedener Eckenfolge aber gleichen Winkeln und Seiten, bei deren Durchlaufung σ_0 oder σ_k[28]) eine ganze Zahl durchschreitet, unterscheiden sich wesentlich dadurch, *daß bei Durchlaufung des einen die Überschlagungszahl der Seite l_k sich ändert, bei Durchlaufung des anderen gleichbleibt.* D. h.:

Sieht man von der Dreiecksfläche noch ab, so sind die in die beiden verschiedenen zueinander symmetrisch liegenden einfachparabolischen Kerne eingehängten Dreiecke mit gleichen Winkeln und Seiten gleichberechtigt, sie entsprechen den beiden an den Verzweigungsstellen der L'Huilierschen Gleichungen möglichen Vorzeichenbestimmungen.

Betrachtet man aber auch die Dreiecksfläche, so vermittelt das in den „richtigen Kern“ eingehängte einfachparabolische Dreieck zwischen zwei Membrandreiecken, während das in den „falschen Kern“ eingehängte die Mannigfaltigkeit der Membrandreiecke von den nicht einfach zusammenhängenden abgrenzt.

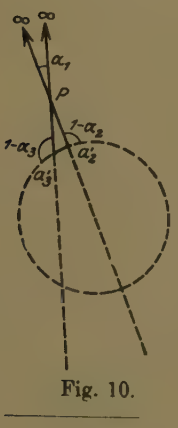

Fig. 10.

An zwei Einzelfällen mag das erläutert werden.

Geht man z. B. von dem einfach zusammenhängenden reduzierten elliptischen Dreieck $\infty\, a_2' a_3'$ mit den Winkeln α_1, $1-\alpha_2$, $1-\alpha_3$ (Fig. 1a) stetig zum parabolischen Fall über, so erreicht man das Zweieck $P\infty$ (in Fig. 1b sind die Seiten dieses Zweiecks gestrichelt), das man als ausgeartetes Dreieck mit den Winkeln α_1, $1-\alpha_2$, $1-\alpha_3$ und der Seite l_1 gleich 0 auffassen kann. Dieses ausgeartete Dreieck ist das dem reduzierten parabolischen Dreieck 2 des § 2 entsprechende in den „falschen Kern“ eingehängte. Setzt man die stetige Abänderung in das Hyperbolische hinein fort, so erhält man das in Fig. 10

[28]) $k = 1, 2$ *oder* 3.

k ausgezeichnete *nicht mehr einfach zusammenhängende* Dreieck
$a_2' a_3'$ mit den Winkeln α_1, $1-\alpha_2$, $1-\alpha_3$, bei dem sich zwei Seiten
rkreuzen, und dessen Seite l_1 einen *negativen* Wert hat. —

Als zweites Beispiel verfolgen wir das reduzierte elliptische Membran-
eck $P a_2 a_3$ mit den Winkeln $2-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Die hieraus im parabo-
nen Fall entstehende Figur zerfällt in zwei Zwei-
e, nämlich die beiden Kreissegmente $P a_2$ und
. Die Winkel dieses zerfallenden Dreieckes
$2-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Es handelt sich also um das
reduzierten Dreieck 4 (§ 2) entsprechende in
„falschen Kern" eingehängte Dreieck. Die
e l_1 wird hier gleich dem Bogen $a_2 P a_3$. Der
erbolische Fall liefert das nicht einfach zusam-
hängende Dreieck $P a_2 a_3$ der Fig. 11 mit den
nkeln $2-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Die Seite $l_1 = a_2 a_3$ (größe-
Bogen!) wird von den beiden anderen Seiten ge-
uzt; ihre Überschlagungszahl ist null, während sie
h den Ergänzungsrelationen gleich 1 sein sollte.

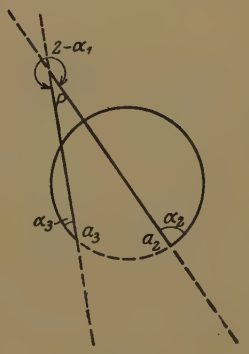

Fig. 11.

In entsprechender Weise wie in diesen Beispielen könnte für alle in
„falschen Kern" eingehängten einfachparabolischen reduzierten oder
t reduzierten Dreiecke der oben angegebene Satz bestätigt werden. —

§ 3a zeigte, daß im *doppeltparabolischen* Fall von vornherein zwei
entlich verschiedene Kerne je nach Vorgabe der Dreieckswinkel zu
erscheiden waren. Versucht man doppeltparabolische Dreiecke, deren
nkelkombination zum Kern I gehört, in den Kern II einzuhängen oder
gekehrt, so findet man, daß auch diese in den „falschen Kern" einge-
gten Dreiecke, indem sie ausarten, einen Übergang bilden von den Mem-
ndreiecken zu denjenigen eigentlichen, in die man keine Fläche ein-
nnen kann. Während dann etwa die einen bestimmten Wert annehmende
e beim Durchgang durch das zu Kern I gehörende doppeltparabolische
ieck ein ganzes Vielfaches von π *durchschreitet*, würde sie diesen Wert
n Durchgang durch das zum Kern II gehörende *erreichen*. D. h.:

Der für einfachparabolische Dreiecke ausgesprochene Satz behält für
peltparabolische Gültigkeit, sofern man ihn auf die beiden wesentlich
schiedenen — also nicht symmetrisch liegenden — *doppeltparabolischen*
ne bezieht. —

Auch in den „falschen Kern" eingehängte Ausnahmedreiecke sind,
man leicht sieht, *Grenzfälle der einfachzusammenhängenden Dreiecke,*
h entsprechen beide Dreiecke der nämlichen Vorzeichenbestimmung
den L'Huilierschen Gleichungen, da sich beim Durchgang durch ein

zum Kern I′ gehörendes Dreieck das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \frac{l_k \pi}{2}$ ebensowenig ändert wie beim Durchgang durch ein zum Kern II′ gehörendes. Analytisch hängt das damit zusammen, daß man die in (2) vorkommende Quadratwurzel als Produkt von 4 Quadratwurzeln

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_0 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_1 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_2 \pi}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma_3 \pi}{2}}$$

schreiben kann und daß daher an den Ausnahmestellen nicht nur 2, sondern 16 verschiedene Vorzeichenbestimmungen für die Quadratwurzel möglich sind.

Für die doppeltparabolischen Dreiecke sind übrigens von diesem Gesichtspunkt aus nicht 2, sondern 4 Möglichkeiten der Vorzeichenbestimmung gegeben. Ob diesen 4 bzw. 16 Möglichkeiten ebensoviel Dreiecksformen entsprechen, von denen dann 3 bzw. 15 innerhalb des Kontinuums der Membrandreiecke den Übergang zu nicht einfachzusammenhängenden Dreiecken bilden würden, soll hier nicht untersucht werden. Unter den 3 bzw. 15 Übergangsdreiecken befindet sich sicherlich das in den „falschen Kern“ eingehängte.

(Eingegangen am 8. Februar 1920.)

Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.

(Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich.)

Von

Hermann Weyl in Zürich.

Die Antinomien der Mengenlehre werden gewöhnlich als Grenzstreitigeiten betrachtet, die nur die entlegensten Provinzen des mathematischen eichs angehen und in keiner Weise die innere Solidität und Sicherheit es Reiches selber, seiner eigentlichen Kerngebiete gefährden können. Die rklärungen, welche von berufener Seite über diese Ruhestörungen abegeben wurden (in der Absicht, sie zu dementieren oder zu schlichten), agen aber fast alle nicht den Charakter einer aus völlig durchleuchteter videnz geborenen, klar auf sich selbst ruhenden Überzeugung, sondern ehören zu jener Art von halb bis dreiviertel ehrlichen Selbsttäuschungsersuchen, denen man im politischen und philosophischen Denken so oft egegnet. In der Tat: jede ernste und ehrliche Besinnung muß zu der insicht führen, daß jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der lathematik als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an en Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum erbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau es Reiches ruht. Ich kenne nur zwei Versuche, das Übel an der Wurzel u packen. Der eine rührt von Brouwer her; schon seit 1907 liegen ewisse richtunggebende Ideen der von ihm angestrebten Reform der lengenlehre und Analysis vor; doch hat er erst in den letzten Jahren seine nsätze zu einer konsequenten Lehre ausgebildet[1]). Unabhängig davon

[1]) Siehe namentlich die Dissertation „Over de grondslagen der wiskunde", Amsterm 1907, den Aufsatz in der Tijdschrift voor wijsbegeerte, II (1908), S. 152—158, n im Bull. Amer. Math. Society, 20 (Nov. 1913), S. 81—96, veröffentlichten ortrag „Intuitionism and Formalism", die Abhandlungen „Begründung der Mengenre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten", Verh. d. K. kad. v. Wetensch. te Amsterdam 1918, 1919, und den Artikel „Intuitionistische engenlehre", Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1919, S. 203—208.

habe ich 1918 in einer Schrift „das Kontinuum“ lang gehegte Gedanken zu einer neuen Grundlegung der Analysis ausgestaltet[2]). Die vorliegenden Schwierigkeiten lassen sich am besten am Begriff der reellen Zahl und des Kontinuums klarmachen; ich will deshalb auch hier wieder davon ausgehen und zunächst kurz über das Wesentliche meines Versuchs, hernach in freier Weise über die Brouwerschen Ansätze berichten.

I. Die atomistische Auffassung des Kontinuums.

1. Der Circulus vitiosus.

Wir gehen mit Dedekind aus von dem System der rationalen Zahlen und wollen die einzelne reelle Zahl α charakterisieren durch die Menge derjenigen rationalen, welche kleiner sind als α. Wir erklären die reelle Zahl geradezu als eine Menge rationaler Zahlen, welche die „Abschnitts-Eigenschaft“ besitzt, mit jeder rationalen Zahl x auch alle rationalen Zahlen $< x$ als Elemente zu enthalten. Diese Mengen sind *unendliche* Mengen, und eine unendliche Menge kann niemals anders gegeben werden als dadurch, daß eine *Eigenschaft* hingestellt wird, welche für die Elemente der Menge charakteristisch ist. Eigenschaften rationaler Zahlen aber konstruiert man auf rein logischem Wege, indem man ausgeht von den ursprünglichen Eigenschaften und Relationen, welche dem Operieren mit rationalen Zahlen zugrunde liegen. Als solche kann man betrachten:

die Eigenschaft: x ist positiv;
die Relation $x + y = z$;
die Relation $x \cdot y = z$.

Geht man von den rationalen auf die natürlichen Zahlen zurück, so ist die einzige Grundrelation, mit Hilfe deren alle übrigen rein logisch zu definieren sind, diejenige, in der das eigentliche Wesen der natürlichen Zahlen liegt; sie besteht zwischen zwei natürlichen Zahlen n, n' dann und nur dann, wenn n' die auf n nächstfolgende Zahl ist. Ähnlich geht die Geometrie des Euklid aus von drei Grundkategorien von Gegenständen: Punkt, Gerade und Ebene, und einigen wenigen, der Anschauung zu entnehmenden „ursprünglichen“ Relationen zwischen ihnen („Punkt liegt auf Gerade“ usw.), von denen in den Axiomen die Rede ist. Alle übrigen Begriffe, insbesondere alle Eigenschaften von Punkten, Geraden und Ebenen und alle Relationen zwischen ihnen sind mit Hilfe jener ursprünglichen Relationen logisch zu erklären.

Den Eigenschaften rationaler Zahlen entsprechen die *Mengen* in solcher Weise, daß zwei Eigenschaften $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ unter Umständen auch dann, wenn

[2]) Vgl. auch meinen Aufsatz „Der Circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis“, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1919, S. 85—92.

sie selber durch verschiedene Konstruktionen aus den ursprünglichen Eigenschaften und Relationen gewonnen sind, die gleiche Menge bestimmen; nämlich dann, wenn die beiden Eigenschaften umfangsgleich sind, d. h. wenn jede rationale Zahl, welche die eine Eigenschaft besitzt, auch der andern teilhaftig ist, und umgekehrt. Für die Identität zweier durch je eine Eigenschaft bestimmten Mengen ist also nicht der *Sinn* der Eigenschaften maßgebend, sondern ihre sachliche Übereinstimmung (im „*Umfang*"), die rein logisch aus der Definition nicht abgelesen, sondern nur auf Grund von Sachkenntnissen festgestellt werden kann. — Es ist natürlich an sich gleichgültig, ob man sich des Wortes „Menge" oder „Eigenschaft" bedient. Nur muß man sich durchaus vor der Vorstellung hüten, daß, wenn eine unendliche Menge definiert ist, man nicht bloß die für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft kenne, sondern diese Elemente selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen habe und man sie nur der Reihe nach durchzugehen brauche, wie ein Beamter auf dem Polizeibureau seine Register, um ausfindig zu machen, ob in der Menge ein Element von dieser oder jener Art existiert. Das ist gegenüber einer unendlichen Menge sinnlos.

Wir betrachten in der Analysis nicht bloß einzelne reelle Zahlen, sondern auch Mengen reeller Zahlen und Zuordnungen zwischen ihnen. Eine reelle Zahl ist nach unserer Erklärung gegeben durch eine Eigenschaft rationaler, eine Menge reeller Zahlen demnach durch eine Eigenschaft A von Eigenschaften rationaler Zahlen. Es ist leicht, derartige „Eigenschaften von Eigenschaften" zu bilden; ein Beispiel ist folgende Definition: Eine Eigenschaft rationaler Zahlen heiße von der Art A, wenn sie der Zahl 1 zukommt (A korrespondiert der „Menge aller reellen Zahlen > 1"). Betrachten wir jetzt die Konstruktion der oberen Grenze einer beliebigen solchen Menge A von reellen Zahlen! Die Grenze, eine reelle Zahl, wird gegeben durch eine Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$ rationaler Zahlen; und zwar wird $\mathfrak{E}_A$ folgendermaßen erklärt: sie kommt einer rationalen Zahl x dann und nur dann zu, *wenn es eine Eigenschaft* $\mathfrak{E}$ *von der Art* A *gibt*, welche der Zahl x zukommt (wenn es eine reelle Zahl $\mathfrak{E}$ in der Menge A gibt, unterhalb deren x liegt). Diese Erklärung rechnet aber, wenn sie einen Sinn besitzen soll, nicht nur darauf, daß der Begriff der Eigenschaft rationaler Zahlen ein in sich klarer und eindeutiger ist, sondern daß auch der Inbegriff „*aller möglichen*" *Eigenschaften* ein in sich bestimmter und begrenzter, prinzipiell überblickbarer ist; denn sie rechnet darauf, daß die Frage: „*Gibt es* eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von gewisser Beschaffenheit?" (nämlich eine solche, welche zugleich von der Art A ist und der Zahl x zukommt) einen Sinn besitzt, sich an einen an sich bestehenden Sachverhalt wendet, der die Frage mit Ja oder Nein beantwortet. *Dies ist jedoch evidentermaßen nicht der Fall.* Denn es sei gelungen, auf irgendeine Weise einen derartigen in sich bestimmten

und begrenzten Kreis von Eigenschaften rationaler Zahlen abzustecken (ic will sie $\varkappa$-Eigenschaften nennen), und es sei A wie oben irgendeine Eige schaft von Eigenschaften; dann hat es einen klaren Sinn, mit Bezug a irgendeine rationale Zahl x zu fragen, ob es eine $\varkappa$-Eigenschaft von d Art A gibt, welche der Zahl x zukommt. Ist dies der Fall, so woll wir ihr die Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$ zuschreiben, sonst absprechen. Nun ist ab ganz deutlich, daß diese Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$ (die ja auf Grund der *Gesamthe* aller $\varkappa$-Eigenschaften definiert ist) ihrem Sinne nach *außerhalb* des $\varkappa$-Kreis steht. Hierin gibt sich kund, daß der Begriff „Eigenschaft rationaler Zahlen wie ich mich ausdrücken will, nicht umfangs-definit ist, und unsere E klärung der oberen Grenze einen Circulus vitiosus enthält. Es ist natürli nicht ausgeschlossen, daß die Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$ mit einer $\varkappa$-Eigenschaft un fangsgleich ist. Um dem Satz von der Existenz der oberen Grenze ein jeden Menge reeller Zahlen einen klaren Sinn zu erteilen und seine Wah heit sicherzustellen, wäre also dies erforderlich: es müßte ein in sich b stimmter und begrenzter Inbegriff von Eigenschaften, „$\varkappa$-Eigenschaften konstruiert werden, für welchen nachweislich der Satz gilt, daß eine Eige schaft $\mathfrak{E}_A$, welche nach dem obigen Schema aus der Gesamtheit der $\varkappa$-Eige schaften konstruiert ist, stets mit einer bestimmten $\varkappa$-Eigenschaft umfang gleich ist. Dies ist niemals versucht worden; es liegt nicht das leises Anzeichen dafür vor, daß eine solche Konstruktion möglich ist; sie i von vornherein so ungeheuer unwahrscheinlich, daß man niemandem ve nünftigerweise zumuten kann, danach zu suchen.

Wir fixieren die gewonnene Einsicht, ohne uns auf eine tiefere e kenntnistheoretische Analyse einzulassen, mit den folgenden Worten. Dur den Sinn eines klar und eindeutig festgelegten Gegenstandsbegriffs m wohl stets den Gegenständen, welche des im Begriffe ausgesprochen Wesens sind, ihre Existenzsphäre angewiesen sein; aber es ist darum keine wegs ausgemacht, daß der Begriff ein *umfangs-definiter* ist, daß es ein Sinn hat, von den unter ihn fallenden *existierenden* Gegenständen als eine an sich bestimmten und begrenzten, ideal geschlossenen Inbegriff zu sprechen Dies schon darum nicht, weil hier die ganz neue Idee des Existierens, d Daseins, hinzutritt, während der Begriff nur von einem Wesen, eine So-sein handelt. Zu dieser Voraussetzung scheint allein das Beispiel d wirklichen Dinges im Sinne der realen Außenwelt, welche als eine an si seiende und an sich ihrer Beschaffenheit nach bestimmte geglaubt wir verführt zu haben. Ist $\mathfrak{E}$ eine ihrem Sinne nach klar und eindeutig gegebe Eigenschaft der unter einen Begriff B fallenden Gegenstände, so behaupt für einen beliebigen derartigen Gegenstand x der Satz: x hat die Eige schaft $\mathfrak{E}$, einen bestimmten Sachverhalt, der besteht oder nicht besteh das Urteil ist an sich wahr oder nicht wahr — ohne Wandel und Wa

und ohne Möglichkeit irgendeines zwischen diesen beiden entgegengesetzten vermittelnden Standpunktes. Ist der Begriff B insbesondere umfangsdefinit, so hat aber nicht nur die Frage „hat x die Eigenschaft $\mathfrak{E}$?“ für einen beliebigen unter B fallenden Gegenstand x einen in sich klaren und eindeutigen Sinn, sondern auch die Existenzfrage „gibt es einen unter B fallenden Gegenstand, welcher die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt?“ Gestützt auf den uns in der Anschauung gegebenen Erzeugungsprozeß der natürlichen Zahlen, halten wir daran fest, daß der Begriff der natürlichen Zahl umfangs-definit ist; ebenso ist es dann mit den rationalen Zahlen bestellt. Nicht umfangs-definit sind aber gewiß die Begriffe „Gegenstand“, „Eigenschaft natürlicher Zahlen“ und ähnliche. Es ist wertvoll, sich nicht bloß durch die oben angestellten Überlegungen dessen überführen zu lassen, sondern diese Tatsache in unmittelbarer Einsicht zu ergreifen.

2. Die Konstruktion.

Die auf reelle Zahlen bezüglichen Existential-Aussagen und, wie wir hinzufügen können, die auf sie bezüglichen allgemeinen Aussagen (sie können als negative Existentialurteile ausgelegt werden) bekommen, wie wir sahen, nur dann einen Sinn, wenn wir den schrankenlosen und umfangsvagen Begriff „Eigenschaft rationaler Zahlen“ zu einem umfangs-definiten „$\varkappa$-Eigenschaft“ einschränken. Wie soll das geschehen? Ein Blick auf das *konstruktive Verfahren* der Mathematik gibt darauf die Antwort. Ich sagte schon oben, daß alle Eigenschaften und Relationen (die Eigenschaften können wir immer mit als Relationen rechnen, es sind Relationen mit nur *einer* Unbestimmten) aus wenigen ursprünglichen Relationen auf rein logischem Wege aufgebaut werden. Der Aufbau geschieht mit Hilfe weniger *logischer Konstruktionsprinzipien*, welche in den Worten „nicht“, „und“, „oder“, „es gibt“ enthalten sind und welche lehren, wie aus einer oder zwei schon konstruierten Relationen eine neue hergeleitet wird. Sie spielen im Gebiete der Relationen die gleiche Rolle wie die vier Spezies im Gebiete der rationalen Zahlen, die ja auch durch ihre Wiederholung in beliebiger Anzahl und Kombination gestatten, von der Zahl 1 aus alle rationalen Zahlen zu erzeugen. Die Konstruktionsprinzipien regeln die Genesis der Eigenschaften und Relationen, sie definieren auf genetische Weise den umfangs-definiten Begriff der $\varkappa$-Eigenschaft und $\varkappa$-Relation. Es ist aber das Verhängnis bisheriger Analysis, daß sie unter ihren Konstruktionsprinzipien auf Schritt und Tritt auch das folgende benutzt: Ist A eine Eigenschaft von Eigenschaften, so erzeuge man daraus die Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$, welche einer rationalen Zahl x dann und nur dann zukommt, wenn sich mit Hilfe der Konstruktionsprinzipien (insbesondere auch dieses Prinzips selbst!) eine Eigenschaft von der Art A bilden läßt, welche der Zahl x zukommt. Solche Regel ist aber

als Konstruktionsprinzip natürlich sinnlos; die Fehlerhaftigkeit des Zirkels ist ja hier mit Händen zu greifen.

Daß das Bild nicht gar zu unbestimmt bleibe, will ich die übrigbleibenden zirkelfreien Definitionsprinzipien hier kurz kennzeichnen.

1. *Identifizierung* mehrerer Unbestimmten; so entsteht aus $N(xy)$ „x ist Neffe von y“: $N(xx)$ „x ist Neffe von sich selber“.

2. *Negation*; aus $N(xy)$ entsteht $\bar{N}(xy)$ „x ist nicht Neffe von y“.

3. Verknüpfung zweier Relationen durch *und*; dabei muß angegeben werden, wie die Unbestimmten beider Relationen miteinander zu identifizieren sind; z. B. aus $N(xy)$ und $V(xy)$ „x ist Vater von y“ die ternäre Relation $N(xy) \cdot V(yz)$ „x ist Neffe von y und y Vater von z“.

4. Verknüpfung zweier Relationen durch *oder*.

5. *Ausfüllung* einer Unbestimmten durch einen gegebenen Gegenstand; aus $F(nn')$ „die natürliche Zahl n' folgt auf n“ entsteht so z. B. die Eigenschaft $F(5n')$ mit der Unbestimmten n': „n' folgt auf 5“.

6. Ausfüllung einer Unbestimmten durch „*es gibt*“; aus der Relation $F(nn')$ geht so die Eigenschaft $F(*n')$ hervor mit der Unbestimmten n': „es gibt eine Zahl, auf welche n' folgt“ (sie kommt allen Zahlen außer 1 zu).

In allen Teilen der Mathematik findet man, daß sich die Neubildung von Eigenschaften und Relationen durch kombinierte Anwendung dieser Prinzipien vollzieht. Sobald aber die *Mengenlehre* eine Rolle zu spielen beginnt, reichen sie nicht mehr aus; diese nämlich beruht darauf, daß sie auch die Eigenschaften und Relationen als Gegenstände betrachtet, zwischen denen neue Relationen bestehen können; sie bildet Mengen, Mengen von Mengen usf. Relationen können dann ebensogut wie die ursprünglichen Gegenstände als „Argumente“ in andern Relationen auftreten. Die Möglichkeit dazu liefert folgender Kunstgriff. Eine Aussage wie etwa „die Rose ist rot“ wird nicht mehr dem Schema „x ist rot“ untergeordnet, sondern dem allgemeineren „x hat die Eigenschaft E“, aus welchem sie durch die Ausfüllung $x =$ Rose, $E =$ rot hervorgeht. Die Worte „hat die Eigenschaft“ bezeichnen eine gewisse Relation ε, welche zwischen einem willkürlichen Gegenstand x und einer willkürlichen Eigenschaft E bestehen kann. Z. B., als wir oben erklärten: eine Eigenschaft E rationaler Zahlen ist von der Art A, wenn sie der Zahl 1 zukommt, bildeten wir die Relation $\varepsilon(xE)$ zwischen einer unbestimmten Zahl x und einer unbestimmten Eigenschaft E und füllten dann x nach dem Prinzip 5. durch die bestimmte Zahl 1 aus. Nehmen wir beim Aufbau der Analysis unsern Ausgang von der ersten Grundlage, den natürlichen Zahlen, so ist dies also das ein zuschlagende Verfahren: Wir haben eine einzige Grundkategorie von Gegenständen, die natürlichen Zahlen; ferner unäre, binäre, ternäre, ... Relationen zwischen solchen. Diese alle nennen wir Relationen 1. Stufe; die Kategorie

der eine solche Relation angehört, ist vollständig gekennzeichnet durch die Anzahl der Unbestimmten, welche in sie eingehen. Die Relationen 2. Stufe sind Relationen, deren Unbestimmte teils willkürliche natürliche Zahlen, teils willkürliche Relationen 1. Stufe sind. Die Kategorie, der eine solche Relation 2. Stufe zugehört, ist festgelegt durch die Zahl ihrer Unbestimmten und durch die Gegenstandskategorien, auf welche jede ihrer Unbestimmten bezogen ist. Relationen 3. Stufe sind solche, in denen unbestimmte Relationen 2. Stufe auftreten usf. Jeder Kategorie $\mathfrak{R}$ von Relationen entspricht eine Relation $\varepsilon(xx'\ldots; X)$, welche bedeutet: $xx'\ldots$ stehen in der Relation X zueinander. X ist darin eine unbestimmte Relation der Kategorie $\mathfrak{R}$, die Unbestimmten $xx'\ldots$ beziehen sich auf die gleichen Gegenstandskategorien wie die Unbestimmten der Relationen X von der Kategorie $\mathfrak{R}$. Diese Relationen ε benutzen wir neben der Relation 1. Stufe $\mathcal{F}$ als Ausgangsmaterial. Die Konstruktion vollzieht sich mit Hilfe der oben angegebenen Prinzipien. Von ihnen sind die Prinzipien 1. bis 4. ohne weiteres schrankenlos anwendbar. 5. ist, wenn mit seiner Hilfe eine unbestimmte Relation in einer Relation höherer Stufe ausgefüllt wird, so zu interpretieren, daß die zur Ausfüllung benutzte Relation ihrerseits auch mit Hilfe der Konstruktionsprinzipien aufgebaut sein muß. Dieses Prinzip kann noch in einem erweiterten Umfang angewendet werden, welcher wichtig ist. Wir können nämlich z. B. eine quinäre Relation $R(uv\,|\,xyz)$ auffassen als eine von den Unbestimmten xyz abhängige binäre Relation zwischen uv, nachdem wir aus den Unbestimmten die Gruppe der „unabhängigen" xyz abgesondert haben. (Hier liegt in meiner Theorie die Wurzel des *Funktionsbegriffs*.) Diese von xyz abhängige binäre Relation kann also zur Ausfüllung einer unbestimmten binären Relation benutzt werden. Das Prinzip 6. endlich, die Ausfüllung durch „es gibt" darf nur auf Zahlargumente, niemals aber auf Argumente, die selbst Relationen irgendeiner Stufe sind, angewendet werden; es führte uns sonst zu Sinnlosigkeiten. Die Einführung von ε bliebe aber ohne jeden Wert, wenn man nicht dem für Relationen in Argumentstellung wirksam werdenden erweiterten Substitutionsprinzip 5. ein solches der *Iteration* hinzufügte. Ich formuliere einen einfachen Fall davon. Es sei $R(mn\,|\,X)$ eine Relation zwischen zwei willkürlichen Zahlen mn und einer willkürlichen binären Zahlrelation X. Aus $R = R_1$ erhalte ich eine Relation R_2 der gleichen Kategorie, wenn ich in $R(mn\,|\,X)$ die Unbestimmte X durch R selber ausfülle, das hier (gemäß der Einteilung der Unbestimmten durch den Vertikalstrich) als eine von X abhängige binäre Relation zwischen den willkürlichen Zahlen m und n aufzufassen ist. In $R_2(mn\,|\,X)$ kann ich abermals für die Unbestimmte X das so aufgefaßte R substituieren und erhalte dadurch eine Relation R_3, usf. Und nun bilde ich diejenige

Relation $R(k; mn|X)$, aus welcher $R_1, R_2, R_3, \ldots$ dadurch hervorgehen, daß ich die unbestimmte Zahl k der Reihe nach durch $1, 2, 3, \ldots$ ausfülle. — Begriffsbildungen und Beweisführungen nach Art der Dedekindschen Kettentheorie haben an dem hier aufgewiesenen Zirkel teil; wir sind darum außerstande, die Definition durch *vollständige Induktion* auf etwas Ursprünglicheres zurückzuführen. Die Reihe der natürlichen Zahlen und die in ihr liegende Anschauung der Iteration ist ein letztes Fundament des mathematischen Denkens. In unserm Iterationsprinzip kommt diese ihre grundsätzliche Bedeutung für den Aufbau aller Mathematik zum Ausdruck.

Die Relationen, welche durch beliebige Wiederholung und Kombination der angegebenen Konstruktionsprinzipien gewonnen werden können, insbesondere die Relationen 1. Stufe zwischen natürlichen Zahlen dieser Art, bezeichne ich als definite oder $\varkappa$-Relationen. Das ist die umfangsdefinite Einschränkung des Relationsbegriffs, auf welche wir ausgingen. Im Hinblick auf diesen genetisch begrenzten Kreis hat es nun einen klaren Sinn, zu fragen: Gibt es eine $\varkappa$-Relation von der und der Art? Definiten Eigenschaften rationaler Zahlen entsprechen (sofern sie selber der Abschnittseigenschaft teilhaftig sind) die reellen Zahlen. Nur wenn wir den Begriff in dieser Weise fassen, die seinen Umfang bestimmt und begrenzt, bekommen Existenzfragen über reelle Zahlen einen Sinn. Durch diese Begriffseinschränkung wird aus dem fließenden Brei des Kontinuums sozusagen ein Haufen einzelner Punkte herausgepickt. Das Kontinuum wird in isolierte Elemente zerschlagen und das Ineinanderverflossensein aller seiner Teile ersetzt durch gewisse, auf dem „größer-kleiner" beruhende begriffliche Relationen zwischen diesen isolierten Elementen. Ich spreche daher von einer *atomistischen Auffassung des Kontinuums*. So verfuhr auch schon die heute anerkannte Analysis. Aber sie entlehnte der Anschauung des Kontinuums die Überzeugung von der „Existenz an sich" aller reellen Zahlen und wurde so nicht gewahr, daß die Möglichkeiten, aus dem Kontinuum einzelne reelle Zahlen herauszulesen, keinen umfangs-definiten Inbegriff bilden. Sie war also eine „Schaukeltheorie", welche hin und herschwankte zwischen (falsch interpretierter) Anschauung und logisch-arithmetischer Konstruktion. Die Theorie, welche hier geschildert wurde, entspringt daraus und nur daraus, daß man sich entschlossen und ohne Kompromiß auf den letzten Standpunkt stellt, die atomistische Auffassung streng konsequent durchführt. — Verstehe ich unter einer „Euklidischen Zahl" eine solche, welche von 1 aus gewonnen werden kann, indem man in beliebiger Kombination die vier Spezies und als fünfte Operation das Quadratwurzelziehen aus einer schon gewonnenen positiven Zahl anwendet, so genügt nach einer gelegentlichen Bemerkung von Dedekind dieses umfangsdefinite System der Euklidischen Zahlen, um innerhalb seiner alle Kon-

truktionen der Euklidischen Geometrie auszuführen. Treibt man Eukli-
ische Geometrie, so kann man sich also auf das System der Punkte be-
chränken, deren Koordinaten Euklidische Zahlen sind; die kontinuierliche
Raumsauce", welche zwischen ihnen ergossen ist, tritt gar nicht in die
rscheinung; jenes System liefert uns ein in sich bestimmtes und be-
renztes Konstruktionsfeld, über das keine Operation der Euklidischen
eometrie hinausführt. Uns ist es hier gelungen, indem wir statt der
ier Spezies und der Quadratwurzeloperation gewisse andere, logische Kon-
truktionsprinzipien in geringer Zahl zugrunde legten, ein umfangs-definites
ahlensystem zu erzeugen, innerhalb dessen nicht bloß die Konstruktionen
er Euklidischen Geometrie, sondern die viel allgemeineren Konstruktionen
er Analysis (sofern sie den Charakter des Circulus vitiosus nicht an der
tirn tragen) unbeschränkt ausführbar sind. Insbesondere gilt innerhalb
ieses „Weylschen Zahlsystems" das Cauchysche Konvergenzprinzip, und
s gilt auch der Satz, daß eine stetige Funktion alle Zwischenwerte an-
immt; — natürlich für solche Funktionen und Zahlfolgen, die selbst mit
Hilfe unserer Konstruktionsprinzipien aufgebaut sind. Wenn ich hernach
azu gelangen werde, meine eigene Theorie preiszugeben, so ist es wohl
rlaubt, dies ihr Verdienst hier mit Nachdruck hervorzuheben. Nie war
s meine Meinung, daß das in der Anschauung gegebene Kontinuum ein
Weylsches Zahlsystem ist; vielmehr, daß die Analysis lediglich eines
olchen Systems zu ihren Konstruktionen bedarf und sich um das da-
wischen ergossene „Kontinuum" nicht zu bekümmern braucht. Die logi-
chen Konstruktionsprinzipien sind nicht künstlich erdacht; sie haben
edenfalls einen weit natürlicheren Charakter als die fünf Operationen, mit
Hilfe deren man das System der Euklidischen Zahlen gewinnt. Sie dienen
icht nur dazu, die reellen Zahlen selbst, sondern auch Punktmengen und
unktionen reeller Variablen zu konstruieren. Hier sind gleichfalls die
niemals exakt formulierten und beständig im Fluß der Entwicklung be-
riffenen) algebraisch-analytischen Operationen, mit Hilfe deren die Ana-
ysis des 17. und 18. Jahrhunderts ihre Funktionen aufbaute, um der All-
emeinheit willen durch rein logische zu ersetzen. Dennoch bleibt man
enötigt, sich auf einen Kreis von Funktionen und Mengen zu beschränken,
elche mit Hilfe solcher Konstruktionsprinzipien gewonnen werden, darf
em Begriffe nicht jene umfangsvage Allgemeinheit lassen, die heute üblich
t, wenn generelle und Existentialurteile über Mengen und Funktionen
inen Sinn behalten sollen.

Einige *Konsequenzen* dieser Lehre sind schon im vorangehenden ge-
treift worden. Wir erwähnten, daß das Cauchysche Konvergenzprinzip
ir Zahlfolgen zu Recht besteht, ebenso die Hauptsätze über stetige Funk-
ionen. Der Satz hingegen, daß eine beschränkte Punktmenge stets eine

präzise obere Grenze besitzt, muß aufgegeben werden, und es ist gar nicht daran zu denken, dieses „Dirichletsche Prinzip“ irgendwie zu retten. — Wie steht es mit der *Abzählbarkeit des Kontinuums*? Die Richardsche Antinomie bekommt hier im folgenden Sinne Recht: Man kann offenbar die Anwendung der logischen Konstruktionsprinzipien so regulieren, daß in einem geordneten Entstehungsprozeß die definiten Eigenschaften und Relationen in bestimmter Reihenfolge erscheinen, wobei man die Sicherheit hat, daß jede derartige Relation an einer gewissen Stelle des Prozesses erzeugt werden wird. Damit ist dann auch insbesondere das System der „reellen Zahlen“ (in unserm Sinne) in eine abgezählte Reihe geordnet. Aber in einem andern und offenbar in der Mathematik allein in Betracht kommenden Sinne bleibt die Gültigkeit von Cantors Behauptung, das Kontinuum sei nicht abzählbar, sowie der von ihm geführte Beweis durchaus zu Recht bestehen: Es gibt keine definite, mit Hilfe unserer Konstruktionsprinzipien aufzubauende Relation $R(x, n)$ zwischen einer willkürlichen rationalen Zahl x und einer willkürlichen natürlichen n, von der Art, daß zu jeder definiten Eigenschaft rationaler Zahlen $E(x)$, welche eine reelle Zahl bestimmt (die Abschnittseigenschaft besitzt), eine natürliche Zahl n gehört, für welche die Eigenschaft $R(\bullet, n)$ mit $E(\bullet)$ umfangsgleich ist. Und diese Aussage genügt auch vollständig, um daraus die von Cantor gezogenen, mathematisch belangreichen Folgerungen zu ziehen, z. B. die Existenz transzendenter Zahlen. Versteht man aber Abzählbarkeit in diesem Sinne, so liegt natürlich nicht der mindeste Grund vor, zu glauben, daß in jeder unendlichen Menge eine abzählbare Teilmenge enthalten sein müßte; die Lückenlosigkeit der $\aleph$'s ist schon bei dem Übergang von den endlichen Kardinalzahlen zu $\aleph_0$ in keiner Weise mehr gewährleistet. — Endlich sei noch eine Bemerkung über die Begründung der *Geometrie* hinzugefügt. Da die Punkte, sofern der Begriff der reellen Zahl in seiner umfangsvagen Allgemeinheit belassen wird, keinen in sich bestimmten und begrenzten Inbegriff bilden, ist es widersinnig, auf dieser Grundkategorie von Gegenständen in analoger Weise die Geometrie zu errichten, wie hier andeutungsweise der Aufbau der Analysis auf dem Fundament des Begriffs der natürlichen Zahl vollzogen wurde. Vielmehr sind wir, um ein umfangs-definites System von Punkten zu erhalten, angewiesen auf ihre logisch-arithmetische Konstruktion. Die „Stetigkeit“ in der Geometrie läßt sich also durch kein „Axiom des Dedekindschen Schnitts“ oder dergleichen fassen; Stetigkeitsgeometrie läßt sich gar nicht als eine selbständige axiomatische Wissenschaft betreiben, sondern man muß analytisch verfahren: Übertragung der fertig entwickelten Analysis in die Sprache der Geometrie mit Hilfe des Übertragungsprinzips, das im Koordinatenbegriff liegt.

II. Das Kontinuum als Medium freien Werdens.

1. Die Grundgedanken.

Wir heben von neuem an und gehen diesmal von einer etwas andern uffassung der reellen Zahlen aus, welche ihr Wesen reiner zum Ausdruck ringt. Wenn eine reelle Zahl α bekannt ist bis zur h-ten Dezimale mit inem Fehler kleiner als ± 1 der h-ten Dezimale, so ist damit ein die ahl α im Innern enthaltendes Intervall angewiesen, das von einer Zahl $\frac{m-1}{10^h}$ bis zur Zahl $\frac{m+1}{10^h}$ reicht; dabei ist m eine gewisse ganze Zahl. Ersetzen wir die Dezimalbrüche um der mathematischen Einfachheit willen urch Dualbrüche, so werden wir also der Definition der reellen Zahlen ie „Dualintervalle" von der Form

$$\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right)$$

ugrunde legen, wo m und h beliebige ganze Zahlen sind. Das hingeschriebene ist insbesondere ein Intervall „von der h-ten Stufe". Die Dualintervalle h-ter Stufe greifen übereinander; wir müssen diese sich berdeckenden Intervalle benutzen und nicht etwa diejenigen, in welche ie Zahlgerade durch die Punkte von der Form $\frac{m}{2^h}$ zerlegt wird, damit mmer, wenn eine reelle Zahl mit einem gewissen (von h abhängigen) rad der Genauigkeit gegeben ist, mit Bestimmtheit eines unter den Interallen h-ter Stufe angegeben werden kann, in welches die Zahl notwendig ineinfällt. Der Begriff der reellen Zahl, als einer *zwar nur approximativ egebenen Zahl, für welche sich aber der Grad der Annäherung über jede renze treiben läßt*, ist demnach einfach so zu formulieren: Eine reelle ahl ist eine unendliche Folge von Dualintervallen $i, i', i'', \ldots$ von der rt, daß jedes Intervall dieser Reihe das nächstfolgende ganz in seinem nnern enthält. Da jedes der Dualintervalle durch zwei ganzzahlige Charaktere ekennzeichnet werden kann (m und h in der obigen Bezeichnung) und as Enthaltensein eines Intervalls in einem andern sich durch eine einche Relation zwischen diesen ihren Charakteren ausdrückt, so bedeutet s nur eine unwesentliche Vereinfachung unserer Überlegungen, wenn wir nächst statt der Folgen ineinander geschachtelter Dualintervalle keiner inschränkung unterworfene *Folgen natürlicher Zahlen* betrachten.

Die Schwierigkeit liegt im Begriff der *Folge*. Wenn der heutigen nalysis überhaupt ein Standpunkt zugrunde liegt, von dem aus ihre Ausgen und Beweise verständlich sind, so ist es der: die Folge entsteht durch, daß die einzelnen Zahlen der Reihe nach willkürlich gewählt erden; das Resultat dieser unendlich vielen Wahlakte liegt fertig vor,

und im Hinblick auf die fertige unendliche Folge kann ich z. B. frage
ob unter ihren Zahlen die 1 vorkommt. Aber dieser Standpunkt i
sinnwidrig und unhaltbar; denn die Unerschöpflichkeit liegt im Wesen d
Unendlichen. Eine einzelne *bestimmte* (und ins Unendliche hinaus b
stimmte) Folge kann nur durch ein *Gesetz* definiert werden. Entsteh
hingegen eine Folge Schritt für Schritt durch freie Wahlakte, so will s
als eine *werdende* betrachtet sein, und nur solche Eigenschaften könne
sinnvollerweise von einer werdenden Wahlfolge ausgesagt werden, für welch
die Entscheidung „ja oder nein" (kommt die Eigenschaft der Folge z
oder nicht) schon fällt, wenn man in der Folge bis zu einer gewisse
Stelle gekommen ist, ohne daß die Weiterentwicklung der Folge übe
diesen Punkt des Werdens hinaus, wie sie auch ausfallen möge, die En
scheidung wieder umstoßen kann. So können wir mit Bezug auf ein
Wahlfolge wohl fragen, ob in ihr an vierter Stelle die Zahl 1 auftrit
aber nicht, ob in ihr die Zahl 1 überhaupt nicht auftritt. Es ist eine erst
grundlegende Erkenntnis Brouwers, daß die durch freie Wahlakte werdend
Zahlfolge mögliches Objekt mathematischer Begriffsbildung ist. Repr
sentiert das *Gesetz* φ, welches eine Folge ins Unendliche hinaus bestimm
die einzelne *reelle Zahl*, so die durch kein Gesetz in der Freiheit ihr
Entwicklung eingeschränkte Wahlfolge das *Kontinuum*. Daß es möglic
ist, mit Wahlfolgen mathematisch zu operieren, ist gewiß schon hinreichen
dadurch belegt, daß man Zuordnungen zwischen Wahlfolgen stiften kan
Z. B. enthält die Formel

$$n_h = m_1 + m_2 + \ldots + m_h$$

ein Gesetz, gemäß welchem eine durch freie Wahlakte werdende Fol
$m_1, m_2, m_3, \ldots$ eine werdende Zahlfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ erzeugt. Allg
meiner kann dazu jedes Gesetz dienen, zufolge dessen in einer werdende
Folge natürlicher Zahlen jede Wahl, die ihr ein weiteres Glied hinzufüg
eine bestimmte Zahl erzeugt. Die etwa beim h-ten Schritt erzeugte Za
wird dabei im allgemeinen nicht bloß von der beim h-ten Schritt g
troffenen Wahl abhängen, sondern von dem ganzen in diesem Augenblic
fertigen Abschnitt der Wahlfolge vom 1. bis zum h-ten Gliede. (Dab
hält die Entwicklung der als Funktionswert auftretenden Folge gleiche
Schritt mit der Entwicklung der Argumentfolge: rückt diese um eine Stel
vor, so auch jene. Es sind natürlich kompliziertere Verhältnisse denkba
auf die wir hernach genau zurückkommen müssen.) Die Brouwersc
Bemerkung ist einfach, aber tief: hier ersteht uns ein „Kontinuum", i
welches wohl die einzelnen reellen Zahlen hineinfallen, das sich aber selb
keineswegs in eine Menge fertig seiender reeller Zahlen auflöst; vielme
ein *Medium freien Werdens*.

Wir befinden uns im Bezirk eines uralten Problems des Denkens, des Problems der Kontinuität, der Veränderung und des Werdens. Von welch zentraler Bedeutung es für die denkende Bewältigung der Wirklichkeit gewesen ist, möge man etwa in K. Laßwitz' „Geschichte der Atomistik" nachlesen; seine Lösung ist geradezu der entscheidende Schritt, welcher die aristotelisch-scholastische, am Substanzbegriff orientierte Physik trennt von der modernen Galileischen. Von jeher stehen sich einander gegenüber eine atomistische Auffassung, die sich das Kontinuum aus einzelnen Punkten bestehend denkt, und eine andere, welche es für unmöglich hält, den stetigen Fluß auf diese Weise zu begreifen. Die erste hat ein begrifflich faßbares System seiender Elemente, aber sie vermag Bewegung und Wirkung nicht verständlich zu machen; alle Veränderung muß sie zu Schein herabsinken lassen. Der zweiten will es in der Antike und bis zu Galilei nicht gelingen, sich aus der Sphäre vager Anschauung in die abstrakter Begriffe zu erheben, welche zur vernunftmäßigen Analyse der Wirklichkeit geeignet wären. Die schließlich errungene Lösung ist diejenige, deren mathematisch-systematische Gestalt die Differential- und Integralrechnung ist. Die moderne Kritik der Analysis zerstört diese Lösung wieder von innen heraus, ohne daß freilich noch das Bewußtsein der alten philosophischen Probleme sonderlich lebendig geblieben ist, und mündet in Chaos und Leersinn. Die beiden hier geschilderten Rettungsversuche lassen in verschärfter und geklärter Form die alte Antithese wieder aufleben: die vorhin geschilderte Theorie ist (im klaren Bewußtsein davon, daß sie so das anschauliche Kontinuum nicht trifft, aber aus der Meinung heraus, daß die Begriffe nur ein starres Sein zu erfassen vermögen) radikal atomistisch; die Brouwersche macht sich anheischig, auf eine gültige und haltbare Weise dem Werden Gerechtigkeit widerfahren zu lassen.

Wir wollen jetzt die zweite durchzuführen suchen. Da sie zwischen dem Kontinuum und einer Menge diskreter Elemente eine absolute Kluft befestigt, die jeden Vergleich ausschließt, kann in ihr die Frage, ob das Kontinuum abzählbar ist, ernstlich überhaupt nicht auftauchen. Ein Gesetz, das aus einer werdenden Zahlfolge eine von dem Ausfall der Wahlen abhängige Zahl n erzeugt, ist notwendig solcher Art, daß die Zahl n festgelegt ist, sobald ein gewisser endlicher Abschnitt der Wahlfolge fertig vorliegt, und sie bleibt dieselbe, wie sich nun auch die Wahlfolge weiter entwickeln möge; so daß von eineindeutiger Beziehung nicht die Rede sein kann. — Es sei $\mathfrak{E}$ eine im Gebiet der Zahlfolgen sinnvolle Eigenschaft, $\bar{\mathfrak{E}}$ ihre Negation. Die Frage: Gibt es eine Zahlfolge von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ oder nicht? entbehrt des klaren Sinns, weil der Begriff des eine Folge ins Unendliche hinaus bestimmenden Gesetzes (in der Ausdrucksweise des I. Teils) nicht umfangs-definit ist. Damals halfen wir uns, indem wir den

Begriff des Gesetzes zu einem umfangs-definiten einschränkten, indem wir forderten, daß es mittels gewisser logischer Konstruktionsprinzipien zirkelfrei aufgebaut wird („$\varkappa$-Gesetz"). Die Antwort ja oder nein auf unsere Frage war dann an sich bestimmt, und beide Möglichkeiten bildeten eine vollständige Disjunktion. Jetzt aber wenden wir die Sache anders. Da freilich eine einzelne bestimmte Folge nur durch ein Gesetz φ definiert werden kann, so lautet die positive Frage auch jetzt: Gibt es ein *Gesetz* von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$. Aber wir spannen diesen Begriff des Gesetzes nicht mehr auf das Prokrustesbett der Konstruktionsprinzipien, sondern: ist in zirkelfreier Weise, wie auch immer, die Konstruktion eines Gesetzes der gewünschten Art gelungen, so sind wir berechtigt zu der Behauptung, daß es ein solches Gesetz *gibt*. Hier ist also von der *Möglichkeit* der Konstruktion gar nicht die Rede, sondern nur im Hinblick auf die *gelungene Konstruktion*, den *geführten Beweis* stellen wir eine derartige Existential-Behauptung auf. Die negative Aussage, daß es ein solches Gesetz nicht gibt, bleibt so natürlich jeden Sinnes bar. Wir können sie jedoch positiv wenden: jede Folge hat die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$, und nun gewinnt sie einen Inhalt, sofern wir hier unter Folge nicht das Gesetz verstehen, sondern im Sinne des Kontinuums, des Mediums aller reellen Zahlen, die durch freie Wahlakte werdende Folge. Es ist also vorauszusetzen, daß es eine Bedeutung habe, die Eigenschaften $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ von einer *werdenden Folge* auszusagen; dann kann es sich ereignen, daß es *im Wesen einer werdenden Folge* liegt, einer Folge, in welcher jeder einzelne Wahlschritt völlig frei ist, daß sie die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$ besitzt. Wie derartige Wesenseinsichten zu gewinnen sind, das auseinanderzusetzen ist hier nicht der Ort. Nur sie liefert uns einen Rechtsgrund dafür, daß wir, so uns jemand ein Gesetz φ vorlegt, ihm ohne Prüfung auf den Kopf zu sagen können: Die durch dieses Gesetz ins Unendliche hinaus bestimmte Folge hat nicht die Eigenschaft $\mathfrak{E}$. Das „es gibt" verhaftet uns dem Sein und dem Gesetz, das „jeder" stellt uns ins Werden und die Freiheit. Da der Umfang der Fälle, in denen die eine oder die andere Behauptung gilt (es gibt eine Folge von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, bzw. jede Folge hat die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$), nicht in sich bestimmt ist, überhaupt im einen Fall der Begriff der Folge ganz anders interpretiert werden muß wie im andern, wäre es absurd, hier an eine vollständige Disjunktion zu denken. Man wird es so verstehen, daß Brouwer erklärt, es liege kein Grund vor, an den *logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten* zu glauben. Ich würde freilich lieber sagen, daß von den beiden in Rede stehenden Aussagen unmöglich noch die eine als die Negation der andern angesprochen werden kann. Das Verhältnis der im I. Teil vertretenen Auffassung I und der Brouwerschen II mag durch beistehende schematische Figur gekennzeichnet werden (der im Bilde enthaltene Ver-

leich hinkt allerdings ziemlich). Da das „Nein nach I" ins Gebiet des öllig legitimen „Ja nach II" weit hineinragt, erscheint das Nein der . Auffassung im Lichte der II. als völlig wertlos. Einen Wert erhält es uch nur, sofern wir unter I berhaupt nicht das Brouwer-che Kontinuum zum Gegen-tand der Untersuchung machen, ondern das in sich bestimmte ystem der durch x-Gesetze de-nierten Folgen.

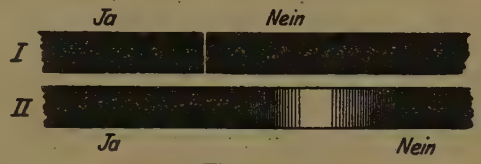

Fig. 1.

Brouwer geht in der Leugnung des logischen Axioms vom ausgeschlossenen Dritten noch wesentlich weiter, als wir bisher auseinandergesetzt haben. Nicht bloß für Existentialsätze über *Zahlfolgen*, sondern auch für Existentialsätze über natürliche *Zahlen* selbst bestreitet er seine Gültigkeit. ist also $\mathfrak{E}$ eine im Gebiet der natürlichen Zahlen sinnvolle Eigenschaft, o daß es an sich feststeht, ob, wenn n irgendeine solche Zahl ist, $\mathfrak{E}$ der Zahl n zukommt oder nicht, so soll es nach Brouwer mit der Frage: Gibt es eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ oder nicht? ähnlich bestellt sein wie im Falle der Zahlfolgen; und das, obschon der Begriff der natürlichen Zahl ja im Gegensatz zu dem der Folge (wenn wir uns darin nicht täuschten) umfangs-definit ist und darum bei seiner Verwendung im Existentialurteil einerseits, dem generellen anderseits auch nicht eine derartige Spaltung erfährt wie der Begriff der Folge (Gesetz — freie Wahl). Brouwer begründet seine Ansicht damit, daß man keinen Grund hat zu dem Glauben, jede derartige Existentialfrage lasse sich *entscheiden*; der Beweis der Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten müßte nach ihm in der Angabe einer Methode bestehen, die nachweislich für beliebige Eigenschaften $\mathfrak{E}$ die Entscheidung der Existenzfrage im einen oder andern Sinne herbeiführt. Wie bekannt, ist dieser Standpunkt zuerst von Kronecker vertreten worden. In bewußtem Gegensatz dazu habe ich bei meinem Versuch der Grundlegung der Analysis die Meinung vertreten: es komme nicht darauf an, ob wir mit gewissen Hilfsmitteln, z. B. den Schlußweisen der formalen Logik, imstande sind, eine Frage zur Entscheidung zu bringen, sondern *wie sich die Sache an sich verhält*; es sei die natürliche Zahlenreihe und der auf sie bezügliche Existenzbegriff in *der* Weise Fundament der Mathematik, daß es für eine im Gebiet der Zahlen sinnvolle Eigenschaft $\mathfrak{E}$ immer an sich feststehe, ob Zahlen von der Art $\mathfrak{E}$ existieren oder nicht. Wir müssen jetzt dieser Kernfrage tiefer auf den Grund gehen.

Von jeder Zahl n lasse sich entscheiden, ob ihr die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt oder nicht. n besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{E}$, bedeute z. B., daß $2^{2^{n+4}}+1$

eine Primzahl ist, $\overline{\mathfrak{E}}$ das Gegenteil ($2^{2^{n+4}}+1$ ist eine zusammengesetzte Zahl). Nun bedenke man dies. Die Meinung, es stünde an sich fest, ob es eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ gibt oder nicht, stützt sich doch wohl allein auf folgende Vorstellung: Die Zahlen 1, 2, 3, ... mögen der Reihe nach auf die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hin geprüft werden; findet sich eine solche von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, so kann man abbrechen, die Antwort lautet *ja*; tritt dieses Abbrechen aber nicht ein, hat sich also *nach beendigter Durchlaufung* der unendlichen Zahlenreihe keine Zahl von der Art $\mathfrak{E}$ gefunden, so lautet die Antwort *nein*. Dieser Standpunkt der fertigen Durchlaufung einer unendlichen Reihe ist jedoch unsinnig. Nicht das Hinblicken auf die einzelnen Zahlen, sondern nur das Hinblicken auf das *Wesen Zahl* kann mir allgemeine Urteile über Zahlen liefern. Nur die *geschehene* Auffindung einer bestimmten Zahl mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ kann einen Rechtsgrund abgeben für die Antwort ja, und — da ich nicht alle Zahlen durchprüfen kann — nur die Einsicht, daß es im *Wesen* der Zahl liegt, die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$ zu haben, einen Rechtsgrund für die Antwort nein; selbst Gott steht kein anderer Entscheidungsgrund offen. *Aber diese beiden Möglichkeiten stehen sich nicht mehr wie Behauptung und Negation gegenüber*; weder die Negation der einen noch der andern gibt einen in sich faßbaren Sinn. — Spricht dies für Brouwer, so wurde ich doch immer wieder auf meinen alten Standpunkt zurückgeworfen durch den Gedanken: Durchlaufe ich die Reihe der Zahlen und breche ab, falls ich eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ finde, so tritt dieser Abbruch entweder einmal ein oder nicht; *es ist so, oder es ist nicht so*, ohne Wandel und Wank und ohne eine dritte Möglichkeit. Man muß solche Dinge nicht von außen erwägen, sondern sich innerlich ganz zusammenraffen und ringen um das „Gesicht", die Evidenz. Endlich fand ich für mich das erlösende Wort. *Ein Existentialsatz* — etwa „es gibt eine gerade Zahl" — *ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet*; Existential-Sachverhalte sind eine leere Erfindung der Logiker. „2 ist eine gerade Zahl": das ist ein wirkliches, einem Sachverhalt Ausdruck gebendes Urteil; „es gibt eine gerade Zahl" ist nur ein aus diesem Urteil gewonnenes *Urteilsabstrakt*. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert kann darin liegen, daß es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen. Das Papier ist wertlos, solange es nicht durch ein solches dahinter stehendes wirkliches Urteil wie „2 ist eine gerade Zahl" realisiert wird. In der Tat, wir sagten oben, als es sich um Zahlfolgen handelte und die Gesetze, welche sie ins Unendliche hinaus bestimmen: Ist es uns gelungen, ein Gesetz zu konstruieren von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, so

nd wir zu der Behauptung berechtigt, daß es Gesetze von der Art (E gibt; ır die *gelungene* Konstruktion kann uns die Berechtigung dazu geben; on *Möglichkeit* ist nicht die Rede. Aber was ist denn das für ein Urteil, as für sich genommen eines Sinnes entbehrt, das vielmehr erst auf Grund es gelungenen Beweises, der die Wahrheit des Urteils verbürgt, seinen *inn* gewinnt? Es ist eben kein Urteil, sondern ein Urteilsabstrakt. amit scheint mir sein Charakter klar bezeichnet und die eigentliche Beutung des Existenzbegriffes aufgeklärt. Jetzt können wir der Brouwerhen Leugnung nicht mehr den Gedanken entgegenhalten, an den ich ich vorhin geklammert hatte: aber es *verhält* sich doch so oder es verält sich nicht so (mag ich auch vielleicht außerstande sein es zu entheiden)! Ebensowenig ist das generelle „jede Zahl hat die Eigenschaft (E" - z. B. „für jede Zahl m ist $m+1=1+m$" — ein wirkliches Urteil, ndern eine generelle *Anweisung auf Urteile.* Kommt mir nun eine einzelne ahl, z. B. 17, in den Weg, so kann ich bei ihr auf diese Anweisung hin n wirkliches Urteil einlösen, nämlich: $17+1=1+17$. Oder um ein ideres Bild zu gebrauchen: vergleiche ich die Erkenntnis einer Frucht nd den einsichtigen Vollzug der Erkenntnis dem Genusse der Frucht, so t ein allgemeiner Satz einer harten Schale voller Früchte zu vergleichen. ewiß hat sie Wert, nicht aber die Schale an sich, sondern nur um ihres halts an Früchten willen; sie ist mir so lange nichts nütze, als ich sie cht aufbreche, eine Frucht wirklich herausnehme und genieße. Die gehilderte Auffassung gibt nur der Bedeutung Ausdruck, welche die allgeeinen und die Existentialsätze tatsächlich für uns besitzen. In ihrem ichte erscheint die Mathematik als eine ungeheure „Papierwirtschaft". ealen Wert, den Lebensmitteln in der Volkswirtschaft vergleichbar, hat ır das Unmittelbare, das schlechthin Singuläre; alles Generelle und alle xistenzaussagen nehmen nur mittelbar daran teil. Und doch denken wir s Mathematiker gar selten an die Einlösung dieses „Papiergeldes"! Nicht as Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte onstruktion. Die Mathematik ist, wie Brouwer gelegentlich sagt, mehr n Tun denn eine Lehre.

Solange man sich zu dem im letzten Absatz geschehenen Schritt cht verstehen kann, stehen die beiden hier geschilderten Versuche der rundlegung der Analysis einander gleichmöglich gegenüber, mag auch der rouwersche von vornherein den Vorzug besitzen, daß die Begriffsbilng nicht gefesselt und dem anschaulichen Wesen des Kontinuums besser recht wird. Sobald man aber den neuen Schritt tut — durch welchen, e ich glaube, der Sinn des „es gibt" und „jeder" erst völlig klar wird — die erste Grundlegung radikal unmöglich; denn die Verengerung des esetzesbegriffs auf den des $\varkappa$-Gesetzes hilft uns dann nichts; die

Frage nach der „Möglichkeit" stellt uns ebensowenig einem mit Ja oder Nein antwortenden Sachverhalt gegenüber, wenn sie gestellt wird mit Bezug auf die beliebig oft zu wiederholende Anwendung der Konstruktionsprinzipien wie mit Bezug auf die unendliche Zahlenreihe, d. i. den beliebig oft zu wiederholenden Prozeß des Übergangs von einer Zahl zur nächstfolgenden. So gebe ich also jetzt meinen eigenen Versuch preis und schließe mich Brouwer an. In der drohenden Auflösung des Staatswesens der Analysis, die sich vorbereitet, wenn sie auch erst von wenigen erkannt wird, suchte ich festen Boden zu gewinnen, ohne die Ordnung, auf welcher es beruht, zu verlassen, indem ich ihr Grundprinzip rein und ehrlich durchführte; und ich glaube, das gelang — soweit es gelingen konnte. Denn *diese Ordnung ist nicht haltbar in sich*, wie ich mich jetzt überzeugt habe, und Brouwer — das ist die Revolution! Immerhin habe ich hier noch einmal die Grundgedanken meiner Theorie dargestellt, weil sie und die Brouwersche in schärfster Weise den alten Kontrast zwischen der atomistischen und der kontinuierlichen Auffassung vor Augen stellen und weil an dem Gegensatz sich besonders eindringlich klar machen läßt, wo es hapert und was geschehen muß. Es wäre wunderbar gewesen, wenn der alte Streit darauf hinausgelaufen wäre, daß sowohl die atomistische wie die Kontinuumsauffassung sich durchführen lasse; statt dessen triumphiert jetzt endgültig die letztere. Brouwer ist es, dem wir die neue Lösung des Kontinuumproblems verdanken, dessen provisorische Lösung durch Galilei und die Begründer der Differential- und Integralrechnung der geschichtliche Prozeß von innen heraus wieder zerstört hatte. Ob ich ein Recht habe, die hier an zweiter Stelle entwickelte als Brouwersche Theorie zu bezeichnen, ist mir allerdings zweifelhaft; darüber später Genaueres. Aber die entscheidenden Anstöße: die werdende Wahlfolge und der Unglaube an das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten, rühren jedenfalls von ihm her.

Unsere Lehre von den allgemeinen und den Existentialsätzen ist keine bildhaft-vage, wie sich u. a. darin zeigt, daß sie sofort zu wichtigen, streng einsichtigen Konsequenzen führt. Vor allem zu der, daß es gänzlich sinnlos ist, derartige Sätze zu negieren; womit überhaupt die Möglichkeit wegfällt, in bezug auf sie ein „Axiom vom ausgeschlossenen Dritten" zu formulieren. Die allgemeinen Sätze, welche ich oben als Urteilsanweisungen bezeichnete, teilen dies mit den eigentlichen Urteilen, daß sie sich in sich selbst genug sind; ja sie bergen sogar eine unendliche Fülle wirklicher Urteile in ihrem Innern. In dieser Hinsicht dürfen wir sie den Urteilen gleichstellen. Wir werden von ihnen freilich nicht gut sagen können wie von den Urteilen, daß sie wahr sind, sondern eher: sie bestehen zu Recht; sie formulieren den Rechtsgrund für alle aus ihnen „einzulösenden" singu-

lären Urteile. Im Gegensatz dazu ist ein Existentialsatz, für sich genommen, *nichts*; ist das Urteil, aus welchem ein solches Urteilsabstrakt gewonnen wurde, verlorengegangen oder vergessen, so bleibt wirklich *nichts* (es sei denn, wie wir oben sagten, ein Ansporn, es wieder zu suchen). Nicht nur aus einem Urteil, sondern auch aus einer Urteilsanweisung kann man ein Abstrakt ziehen. Z. B. sei $R(m, n)$ eine Relation zwischen natürlichen Zahlen, eine Relation, die zwischen irgend zwei Zahlen besteht oder nicht besteht. Für irgend zwei bestimmte Zahlen m, n sei also die Behauptung oder die Leugnung, daß sie in der Relation R zueinander stehen, ein wirkliches Urteil. Die Urteilsanweisung $R(m, 5)$ [„jede Zahl m steht zu 5 in der Beziehung R" oder „die Eigenschaft $R(o, 5)$ zu besitzen, liegt im Wesen der Zahl"] bestehe zu Recht. Dann können wir daraus das Abstrakt ziehen: es gibt eine Zahl n (beiseite gesagt: nämlich 5), so daß jede Zahl m zu ihr die Beziehung $R(m, n)$ erfüllt. Dagegen ist eine Anweisung auf Urteilsabstrakte das reine Nichts, sofern nicht eine Anweisung auf wirkliche Urteile dahinter steht, aus welcher sie als Abstrakt gewonnen ist. Beispiel: Zu jeder Zahl m gibt es eine Zahl n derart, daß zwischen ihnen die Beziehung $R(m, n)$ besteht. Es muß sich da in Wahrheit um das Abstrakt aus einer Urteilsanweisung handeln. Welcher Urteilsanweisung? Offenbar der folgenden. Es sei φ ein bestimmtes Gesetz, das aus jeder Zahl m eine Zahl $\varphi(m)$ erzeugt; die generelle Urteilsanweisung $R(m, \varphi(m))$ bestehe zu Recht. Dann können wir aus ihr das Abstrakt ziehen: es gibt ein *Gesetz* φ, so daß für jede Zahl m zwischen m und $\varphi(m)$ die Beziehung R statthat. So also muß unser obiger Satz sinnvollerweise interpretiert werden. Kommt uns jetzt irgendeine Zahl, z. B. 7, in den Weg, so erzeugt uns das Gesetz φ aus 7 eine bestimmte Zahl, sagen wir $\varphi(7) = 19$; dann können wir sagen: zwischen 7 und 19 besteht die Beziehung R, und in Hinblick darauf haben wir auch ein Recht zu dem Urteilsabstrakt: es gibt eine Zahl n, welche zu 7 in der Beziehung $R(7, n)$ steht. Das „es gibt" muß also das „jeder" einschließen und nicht umgekehrt, wenn wir die Sätze so formulieren, wie sie als Abstrakte aus sich selbst genugsamen Sätzen herausgezogen werden.

Ausgangspunkt der Mathematik ist die Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. das Gesetz $\aleph$, das aus dem Nichts die erste Zahl 1 erzeugt und aus jeder schon entstandenen Zahl die nächstfolgende erzeugt; ein Prozeß, der niemals zu einer schon dagewesenen Zahl zurückführt. Wollen wir die Zahlen irgendwie für die Anschauung festhalten, so müssen wir sie symbolisch, durch qualitative Merkmale voneinander unterscheiden. Sofern wir aber Arithmetik treiben, sehen wir von derartigen qualitativen Merkmalen ganz ab; für die Arithmetik ist 1 lediglich „die aus dem Nichts Erzeugte", 2 „die aus der 1 Erzeugte" usf. Es wird, darf man sagen,

durch die mathematische Betrachtung der Wirklichkeit der Versuch gemacht, die Welt, welche dem Bewußtsein in dessen allgemeiner Form, einer Durchdringung von *Sein* und *Wesen* (des „dies" und „so") gegeben ist, in der Absolutheit reinen Seins darzustellen. Daher liegt eine tiefe Wahrheit in der Pythagoreischen Lehre, daß jegliches Sein als solches auf der Zahl ruht.

Die allgemeinen, in sich selbst genugsamen Sätze der Mathematik handeln teils von der Allheit der natürlichen Zahlen, teils von der Allheit der durch freie Wahlakte werdenden Folgen natürlicher Zahlen. Sie beziehen sich also teils auf die ins Unendliche hinaus sich erstreckende *Möglichkeit*, welche durch den grenzenlosen Fortgang des vom Gesetze $\aleph$ gelenkten Entwicklungsprozesses der natürlichen Zahlen gegeben ist, teils auf die in der werdenden Zahlfolge liegende unendliche Freiheit immer neuer ungebundener Wahlakte, die bei jedem Schritt den von neuem anhebenden Entwicklungsprozeß der natürlichen Zahlenreihe an einer willkürlichen Stelle zum Stillstand bringen. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Wesenseinsicht, welcher die allgemeinen Sätze entspringen, stets auf der sog. vollständigen Induktion fundiert ist. Sie ist weiterer Begründung weder bedürftig noch fähig, weil sie nichts anderes ist als die mathematische Urintuition des „immer noch eins". Die aus diesen allgemeinen Sätzen zu gewinnenden eigentlichen Urteile entstehen dadurch, daß für die *willkürliche* Zahl, von der sie handeln, eine *bestimmte* eingesetzt wird, für die in freier Entwicklung begriffene *Wahlfolge* aber ein *Gesetz* φ, das eine einzelne Zahlfolge ins Unendliche hinaus bestimmt. Aus den sich selbst genügenden Urteilen und Urteilsanweisungen werden Abstrakta gezogen, bei denen das „es gibt" sich entweder beziehen kann auf eine natürliche Zahl oder auf ein Gesetz, und zwar auf ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine Zahl erzeugt (*functio discreta*) oder das aus jeder durch freie Wahlakte werdenden Folge eine Zahl erzeugt (*functio mixta*) oder das aus jeder durch freie Wahlakte werdenden Folge wiederum eine werdende Folge erzeugt (*functio continua*). Wir machen aber diese Gesetze selber nicht zum Gegenstand allgemeiner Aussagen. Wo es heißt „jede Folge", wandelt sich der Begriff des Gesetzes (functio discreta) in den der werdenden Wahlfolge; hingegen steht uns für die functiones mixtae und continuae kein derartiges Kontinuum zur Verfügung, in das sie sich einbetten wie die einzelnen functiones discretae in das Kontinuum der frei werdenden Wahlfolgen. Das alles ist a priori durch das Wesen des Erzeugungsprozesses $\aleph$, der mathematischen Urintuition vorgezeichnet. — Jede Anwendung der Mathematik muß ausgehen von gewissen, der mathematischen Behandlung zu unterwerfenden Objekten, welche durch eine Anzahl Charaktere sich voneinander unterscheiden lassen; die Charaktere sind natürliche Zahlen.

urch das symbolische Verfahren, das jene Objekte durch ihre Charaktere rsetzt, ist der Anschluß an die reine Mathematik und ihre Konstruktionen rreicht. So liegt der Punktgeometrie auf der geraden Linie das System er oben erwähnten Dualintervalle zugrunde, die wir durch zwei ganzahlige Charaktere kennzeichnen konnten.

2. Begriff der Funktion.

a) *Functio discreta.*

Folge (functio discreta, f. d.), hatten wir gesagt, ist ein Gesetz, das aus der Zahl eine Zahl erzeugt. Die Freiheit der Gesetzeskonstruktion ist in keiner Weise beschränkt; immerhin muß das Gesetz so beschaffen sein, daß es wirklich zu jeder Zahl die erzeugte oder zugeordnete eindeutig bestimmt. Die folgende Festsetzung z. B.: n erzeuge die Zahl 1, wenn es drei natürliche Zahlen x, y, z gibt von der Beschaffenheit, daß $x^n + y^n = z^n$ ist, hingegen die Zahl 2, wenn $x^n + y^n \neq z^n$ ist, wie auch die drei Zahlen x, y, z gewählt werden mögen: diese Vorschrift ist kein Gesetz. Denn nach den logischen Einsichten, zu denen wir uns durchgekämpft, liegt hier eine Regel vor, welche die zugeordnete Zahl wirklich bestimmt. Ebensowenig ist die Regel „n erzeuge die Zahl 2, falls es eine Zahl m gibt von der Art, daß $n = 2m$ ist; falls aber $n \neq 2m$ ist für jede natürliche Zahl m, erzeuge n die 1“ ihrem Wortlaut nach ein Gesetz; wohl aber die folgende, welche ohne ein auf die unendliche Reihe der natürlichen Zahlen sich beziehendes „es gibt“ oder „jede“ den Unterschied zwischen *gerade* und *ungerade* durch vollständige Induktion zu entscheiden gestattet: „1 erzeuge die Zahl 1; erzeugt n die Zahl 1, so die auf n folgende Zahl n' die 2; erzeugt hingegen n die Zahl 2, so n' die 1“. Praktisch ausgedrückt, soll also eine Regel vorliegen, welche gestattet, bei vorgegebener Zahl die aus ihr erzeugte zu bestimmen, wenn wir nur imstande sind, dem Entwicklungsprozeß der Zahlenreihe bis zu einer beliebigen Stelle zu folgen, mit anderen Worten: sofern wir aus jeder Zahl die nächstfolgende erzeugen und, wenn irgendeine Zahl ist, die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufen können. Bei dem symbolischen Verfahren, das die Zahlen durch qualitativ unterschiedene Zeichen repräsentiert, müssen wir außerdem natürlich voraussetzen, daß wir in der Lage sind, von zwei gegebenen Zahlen zu entscheiden, ob sie gleich oder verschieden sind.

Eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von der Art, daß der Satz „die beliebige Zahl n besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{E}$“ ein Urteil im eigentlichen Sinne ist, eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ also, welche einer Zahl zukommt oder nicht, können wir, wie das obige Beispiel von gerade und ungerade erkennen läßt, als besondere Folge erklären, nämlich als ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine der Zahlen

1 oder 2 erzeugt; wobei etwa die 1 als Symbol für *ja*, die 2 als Symbol für *nein* dient. Da wir später das Wort Eigenschaft in einem weiteren Sinne verwenden wollen, werde ein derartiges Gesetz C als *Charakter* bezeichnet. Sein *Negat* $\bar{C}$ entsteht durch Vertauschung von 1 und 2 (ja und nein). Der Begriff des Charakters läßt sich zu dem des *k-teiligen Charakters* erweitern; das ist ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine der Zahlen von 1 bis k erzeugt. Das einfachste Beispiel ist der Kongruenzcharakter mod k. Er beruht auf der zyklischen Anordnung der Zahlen von 1 bis k, in welcher die Zahlen so aufeinander folgen, wie sie der Entwicklungsprozeß der Zahlenreihe liefert; der Prozeß wird aber bei k abgebrochen und auf k folgt wieder 1. Das Gesetz, welches jeder Zahl n seinen Kongruenzrest $\equiv_k(n)$ zugeordnet, ist dann so zu formulieren: $\equiv_k(1) = 1$; $\equiv_k(n')$ ist für jedes n die in der zyklischen Anordnung der Zahlen von 1 bis k auf $\equiv_k(n)$ folgende Zahl. Dies Gesetz beschreibt in der Tat das Verfahren, das wir einschlagen, wenn wir in praxi z. B. zu entscheiden haben, ob eine gewisse Zahl n durch 5 teilbar ist: die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufend, zählen wir immer von 1 bis 5 durch und fangen dann wieder mit 1 an. — Wo wir das Wort Charakter ohne einen Zusatz gebrauchen, ist stets an einen zweiteiligen Charakter zu denken.

Das ursprünglichste Gesetz ist dasjenige, welches aus jeder Zahl n die nächstfolgende n' (oder $n+1$) erzeugt. Ist k irgendeine Zahl, so bezeichnet bekanntlich $n+k$ die nach dem folgenden Gesetz aus n erzeugte Zahl: 1 erzeugt $k+1$; bei Übergang von n zur nächstfolgenden Zahl verwandelt sich auch die von n erzeugte in die auf sie folgende. Damit haben wir nun ein Gesetz, das aus je *zwei* Zahlen n und k eine Zahl $n+k$ erzeugt. Auch hier sprechen wir natürlich noch von einer functio discreta; sie enthält zwei Argumente, ist nicht eine einfache, sondern eine Doppelfolge. — Man weiß, wie aus der *Addition* die Doppelfolge der *Multiplikation* konstruiert wird, die je zwei Zahlen m und n ihr Produkt $m \cdot n$ zuordnet. Eine Doppelfolge, die aus jedem Zahlenpaar m, n stets eine der Zahlen 1 oder 2 erzeugt, werden wir eine *Relation* nennen; allgemeiner eine Doppelfolge, in welcher nur die Zahlen von 1 bis k als Funktionswerte zur Verfügung stehen, eine k-teilige Relation. $m \leqq n$ ist in diesem Sinne z. B. eine (zweiteilige) Relation: das Zahlenpaar m, n erzeugt die 1, falls m mit einer der Zahlen von 1 bis n übereinstimmt; wenn das aber nicht der Fall ist, die Zahl 2. Endlich wollen wir auch solche Fälle zulassen, in denen die Funktion nicht für alle möglichen Argumentwerte erklärt ist; wir sprechen dann von einer *zerstreuten Folge*. Das ist also ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine Zahl oder nichts erzeugt. So entsteht z. B. $n - 5$ aus n nach dem Gesetz, daß die Zahlen von 1 bis 5 nichts erzeugen, alle weiteren aber eine bestimmte Zahl gemäß der Regel: $6 - 5 = 1$; $n' - 5 = (n-5)'$.

Der Begriff der zerstreuten Folge ist nicht wesentlich von dem der Folge verschieden, da wir in diesem Zusammenhang das Nichts als eine allen übrigen vorangehende Zahl 0 deuten können.

Wir führen noch einige weitere Beispiele von functiones discretae an und beweisen ein paar primitive Tatsachen der Arithmetik. Zunächst den Satz: Ist n irgendeine Zahl vom Kongruenzrest 0 mod k [$\equiv_k(n) = k$ in der obigen Bezeichnung], so gibt es eine Zahl m von der Art, daß $n = k \cdot m$; d. h. es gibt ein Gesetz, das aus jeder Zahl n vom Kongruenzcharakter 0 eine Zahl m erzeugt von der Art, daß $n = k \cdot m$ ist. Wir haben dieses Gesetz Q („Quotient") anzugeben: $Q(1) = 1$; ist $Q(n) = m$, so auch $Q(n') = m$, wenn $\equiv_k(n) \neq k$ ist; wenn aber $\equiv_k(n) = k$ ist, $Q(n') = m'$. Man beweist dann leicht, daß, wenn $\equiv_k(n) = i$, $Q(n) = m$ gesetzt wird, allgemein $n + k = km + i$ gilt. Das Gesetz gibt die Regel an, nach der wir in praxi die Division wirklich ausführen. — Eine Zahl n ist eine Primzahl, wenn sie > 1 ist und keines der endlich-vielen Zahlenprodukte $a \cdot b$ der folgenden Tabelle

$$(\mathrm{T}) \left\{ \begin{array}{c} 1 \cdot 1, 1 \cdot 2, \ldots, 1 \cdot (n-1), \\ 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \ldots, 2 \cdot (n-1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1) \cdot 1, (n-1) \cdot 2, \ldots, (n-1) \cdot (n-1) \end{array} \right.$$

(die wir so durchlaufen können, wie wir die Zeilen eines Buches lesen) mit n übereinstimmt. Dieses Gesetz erklärt die Primzahleigenschaft als einen Charakter. Es besteht die Urteilsanweisung zu Recht: Das Produkt zweier Zahlen > 1 ist niemals eine Primzahl. Wir erklären ein Gesetz, das aus 1 nichts erzeugt, aus jeder Zahl $n > 1$ aber zwei Zahlen $\pi(n)$, $\varkappa(n)$ derart, daß allgemein $\pi(n) \cdot \varkappa(n) = n$ ist und $\pi(n)$ stets eine Primzahl; nämlich folgendermaßen. Ist n eine Primzahl, so sei $\pi(n) = n$, $\varkappa(n) = 1$; ist n aber keine Primzahl, so sei $\pi(n)$, $\varkappa(n)$ das erste Zahlenpaar in der nach gegebener Anweisung zu durchlaufenden Tabelle T, dessen Produkt $= n$ ist. Im Hinblick auf dies Gesetz können wir folgenden Satz (Abstrakt einer Urteilsanweisung) formulieren: In jeder Zahl > 1 geht eine Primzahl auf. Die Folge der Primzahlen selbst p_n wird nach Euklid durch folgendes Gesetz definiert, welches das Zeichen π in der eben eingeführten Bedeutung benutzt: 1 erzeugt die Primzahl $p_1 = 2$; p_{n+1} ist die erste Primzahl in der Reihe der Zahlen von 1 bis $\pi(p_1 p_2 \ldots p_n + 1)$, welche sowohl $\neq p_1$ wie $\neq p_2 \ldots$ wie $\neq p_n$ ist. — Endlich noch dieses Beispiel. Lassen wir die Gültigkeit des „großen" Fermatschen Satzes ganz dahingestellt, so war es doch nach der vor-Brouwerschen Logik selbstverständlich, daß es, wenn n irgendeine Zahl ist, entweder drei Zahlen xyz gibt von der Beschaffenheit, daß $x^n + y^n = z^n$ ist, oder aber

$x^n + y^n \neq z^n$ ausfällt für beliebige natürliche Zahlen xyz. Diese Selbst-
verständlichkeit der alten Logik wollen wir nach unserer neuen Auffassung
genauer formulieren. Die Behauptung ist dann die: Es gibt ein Gesetz
(in dem strengen, hier zugrunde gelegten Sinne), das aus jeder Zahl n
entweder nichts oder drei Zahlen x_n, y_n, z_n erzeugt derart, daß im ersten
Fall für irgend drei Zahlen xyz stets $x^n + y^n \neq z^n$ ist, im zweiten aber
$x_n^n + y_n^n = z_n^n$ gilt. Geschweige, daß diese Behauptung jetzt selbstver-
ständlich ist, hat es nicht einmal einen Sinn, zu fragen, ob es sich so
verhält oder nicht, in der Hoffnung, einem Sachverhalt gegenüberzustehen,
der darauf eine bestimmte Antwort erteilt. Sondern es handelt sich um
ein Urteilsabstrakt, das gültig ist, sofern das Gesetz konstruiert ist und
die geforderten Eigenschaften desselben, welche generelle Aussagen sind,
zu Recht bestehen. Liegt dieses Gesetz μ vor, so können wir aus ihm
ein anderes konstruieren, welches der Zahl n die 1 zuordnet, falls μ aus
n nichts erzeugt, hingegen die 2, falls μ dem n drei Zahlen $x_n y_n z_n$ zu-
ordnet. Dieses Gesetz ist dann der „Charakter", welcher die Fermatschen
Zahlen n (für welche der Fermatsche Satz gültig ist) unterscheidet von
den nicht-Fermatschen.

Wenn die Werte zweier functiones discretae für jedes Argument über-
einstimmen, sagen wir, die Funktionen selber *stimmten überein*; wenn es
aber eine Zahl n gibt, aus welcher das erste Gesetz eine andere Zahl
erzeugt als das zweite, so sagen wir, die beiden Folgen seien voneinander
verschieden. Die eine Aussage ist eine generelle, die andere eine Exi-
stentialaussage; keine ein Urteil im eigentlichen Sinne. Wir dürfen also
auch nicht mit Bezug auf zwei gegebene Folgen fragen, ob sie überein-
stimmen oder verschieden sind, in der Meinung, daß es sich so oder so
verhalte.

Solange wir nur generelle Sätze über die Zahlen aufstellen und nicht
über die durch freie Wahl werdenden Folgen von Zahlen, somit auch nur
Gesetze in Betracht ziehen, welche Zahlen einander zuordnen, nicht aber
Gesetze, welche aus einer werdenden Wahlfolge eine vom Ausfall der
Wahlen abhängige Zahl erzeugen oder wiederum eine werdende Zahlfolge,
bewegen wir uns in dem Felde der reinen *Arithmetik und Algebra*. Jene
höheren Stufen sind charakteristisch für die *Analysis*. Das Vorstehende
dürfte genügend verdeutlichen, in welchem Geiste nach der neuen Auf-
fassung Arithmetik und Algebra betrieben werden müssen; ihre radikalen
Konsequenzen, welche der Mathematik ein wesentlich anderes Gesicht geben
als sie uns heute zeigt, entfaltet die neue Theorie aber erst im Felde der
Analysis.

b) *Functio mixta.*

Eine Funktion, welche jeder Zahl m eine Folge, d. i. ein durch m bestimmtes, aus jeder Zahl n eine Zahl $\varphi(m, n)$ erzeugendes Gesetz zuordnet, ist nichts anderes als eine Doppelfolge, fällt also unter den Begriff der functio discreta. Wie aber kann umgekehrt eine Folge, d. i. diesmal eine durch freie Wahlen werdende Folge von Zahlen $r = \{n_1, n_2, \ldots\}$, eine einzelne Zahl erzeugen? Der einfachste Fall ist offenbar der, wo die erzeugte Zahl lediglich von einer beschränkten Anzahl k von Stellen der werdenden Folge abhängt; dann ist man sicher, daß die Zahl bestimmt ist, sobald die Entwicklung der Folge bis zum k-ten Gliede gediehen ist. Die Stellenzahl k ist dabei unabhängig von dem Ausfall der einzelnen Wahlakte. Beispiel:

$$f(\nu) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \qquad (k = 4).$$

Ein komplizierterer Fall ist der folgende:

$$f(\nu) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{n_1+n_2+n_3}.$$

Hier ist es so: Nachdem drei Stellen der Folge da sind, ist es bekannt, bis zu welcher Stelle (nämlich $n_1 + n_2 + n_3$) die Folge fortgesetzt werden muß, ehe sie die erzeugte Zahl festlegt; diese Stelle hängt von dem Ausfall der ersten drei Wahlen ab. Diese Komplikation kann sich iterieren; z. B.: die ersten 10 Stellen bestimmen die Anzahl s derjenigen Stellen, die bekannt sein müssen, um ihrerseits die Stelle zu bestimmen, bis zu welcher die Entwicklung fortgeschritten sein muß, ehe sie die zugeordnete Zahl erzeugt; usf. Es ist aber auch nicht gesagt, daß die erwähnte Komplikation sich gerade zweimal oder dreimal oder viermal iteriere, sondern es kann wiederum von dem Ausfall der ersten Wahlen abhängen, wie oft sie sich iteriert. Setzt man z. B.

$$f(k; \nu) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

und bildet durch Iteration

$$\begin{aligned} f_1(k; \nu) &= f(k; \nu), \\ f_2(k; \nu) &= f_1(f(k; \nu); \nu), \\ f_3(k; \nu) &= f_2(f(k; \nu); \nu), \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so leitet man daraus etwa die folgende functio mixta (abgekürzt f. m.) her:

$$f_{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}(7; \nu).$$

Ich spreche das allgemeine Prinzip aus, das diesen Konstruktionsmöglichkeiten zugrunde liegt.

1. Ist k eine natürliche Zahl und $\varphi(n_1\, n_2 \ldots n_k)$ irgendeine Funktion von k Argumenten, so wird, wenn $n_1\, n_2 \ldots n_k$ die ersten k Stellen einer durch freie Wahlen werdenden Folge ν sind, durch $f(\nu) = \varphi(n_1\, n_2 \ldots n_k)$ eine „primitive" f. m. definiert.

2. Primitive f. m. sind der Ausgangspunkt für die Bildung höherer f. m., welche nach dem folgenden Prinzip vor sich geht: Ist $f(k; \nu)$ eine schon konstruierte f. m., die noch von einer willkürlichen natürlichen Zahl k abhängt und ebenso $g(\nu)$ eine schon konstruierte f. m., so erhält man eine neue f' nach der Substitutionsformel

$$f'(\nu) = f(g(\nu); \nu).$$

Diese Regel ist, wie wohl zu beachten, nicht ein Konstruktionsprinzip, welches den im I. Teil besprochenen zu vergleichen ist, weil hier nichts darüber vorausgesetzt ist, wie die Abhängigkeit der f. m. von dem Parameter k zustande kommt. Die Iteration ist eine, aber nicht die einzige Möglichkeit; in dieser Hinsicht bleibt die Konstruktion völlig frei. Im übrigen wollen wir hier die Frage gar nicht erwägen, ob nur auf diesem Wege f. m. gebildet werden können oder ob nicht auch mit gewissen anders gebauten Erzeugungsgesetzen sich die Wesenseinsicht verbindet: nach diesem Gesetz tritt bei einer werdenden Folge, sie mag sich entwickeln wie sie will, stets einmal der Augenblick ein, wo sie eine Zahl aus sich gebiert. Das ist das Merkmal, welches allein wesentlich ist für den Begriff der f. m.

Der besondere Fall des *Charakters* liegt vor, wenn für die erzeugte Zahl dem Wortlaut des Gesetzes nach nur die Werte von 1 bis k zur Verfügung stehen. — Wollen wir andrerseits auch die Möglichkeit mit umfassen, daß die Funktion nicht für alle Folgen definiert ist („zerstreute" f. m.), so müssen wir zulassen, daß es „taube" Folgen geben kann, die keine Zahl erzeugen; es muß dann aber aus dem Gesetz für jede Folge ν, wie sie sich auch entwickeln möge, hervorgehen: Bis zu einer gewissen (von ν abhängigen) Stelle ist entweder die erzeugte Zahl da oder die Gewißheit, daß es sich um eine taube Folge handelt, die in alle Ewigkeit unfruchtbar bleibt.

Mehrere Argumente, d. i. mehrere nebeneinander in Entstehung begriffene Wahlfolgen können wir immer als eine einzige betrachten; die Übertragung der Begriffe ist damit gegeben. Statt von „Charakter" sprechen wir dann von „Relation".

c) *Functio continua.*

Wir gehen zu den functiones continuae (f. c.) über. Einen besonderen Fall haben wir schon betrachtet, als der Gedanke der werdenden Folge zum erstenmal in unsern Gesichtskreis trat. Da hielt das Wachstum

r Folge, die als Funktionswert auftrat, gleichen Schritt mit dem Wachs-
m des Arguments. Beseitigen wir diese besondere Annahme, so kommen
ir zu folgender Erklärung:

Eine f. c. ist ein Gesetz, gemäß welchem in einer durch freie Wahl-
te werdenden Folge von natürlichen Zahlen jeder Schritt, welcher ihr
n weiteres Glied hinzufügt, eine bestimmte Zahl oder nichts erzeugt.
as beim k-ten Schritt geschieht, hängt dabei nicht bloß von dem Aus-
ll der Wahl beim k-ten Schritt, sondern im allgemeinen von der ganzen
rgangenheit der Argumentfolge in diesem Augenblicke der Entwicklung ab.

Bei solcher Formulierung sind wir aber noch nicht sicher, daß die
lge, welche den Funktionswert ergibt, wirklich ins Unendliche wächst,
nn die Entwicklung der Argumentfolge ins Unendliche fortschreitet. Es
uß also noch die folgende Forderung **V** hinzutreten: Ist k eine beliebige
türliche Zahl, ν eine werdende Folge, und verfolgen wir deren Ent-
icklung von der k-ten Stelle ab, so tritt gewiß einmal der Augenblick
n, wo sie eine neue Zahl (und nicht nichts) erzeugt.

Ferner haben wir den Begriff der f. c. noch so zu verallgemeinern,
aß er auch diejenigen Fälle mitumfaßt, wo die Funktion nicht für alle
öglichen Folgen definiert ist. Dies geschieht, indem wir zulassen, daß
e werdende Wahlfolge bei jedem Schritt eine Zahl oder nichts erzeugt
er aber den Abbruch des Prozesses, ihren eigenen Tod, herbeiführt
nd die Vernichtung seines bisherigen Erzeugnisses). Die Forderung **V** ist
icht zu übertragen: Eine Wahlfolge ν, die bis zum k-ten Gliede ohne
bbruch des Prozesses gediehen ist, muß von k ab, wie sie auch fortge-
tzt werde, spätestens bis zu einer gewissen, von k und ν abhängigen
elle wiederum eine Zahl hervorgebracht haben oder durch das Gesetz
r f. c. getötet sein. Es ist hier aber noch eine weitere Forderung hin-
zufügen. Sei z. B. $g(\nu)$ eine f. m. und $\Phi(\nu)$ eine „zerstreute" f. c.,
e wir sie hier im Auge haben. Eine werdende Folge ν sei, ohne daß
rch Φ ein Abbruch des Prozesses eingetreten ist, so weit gediehen, daß
r von der zugehörigen Folge $\nu' = \Phi(\nu)$ bereits entstandene Abschnitt
e Zahl $g(\nu')\{= g(\Phi(\nu))\}$ bestimmt; sie sei etwa $= 2$. Tritt für eine
lge ν nach dem Gesetz Φ irgendwann einmal der Abbruch des Prozesses
n, so wird für ein solches ν die Funktion $g(\Phi) = g'$ nicht erklärt sein,
so nichts bedeuten. Können wir nun unter den eben geschilderten Um-
änden behaupten: Es gibt eine Folge ν, für welche $g(\Phi(\nu)) = 2$ ist?
ch nur dann, wenn wir sicher sind, daß eine Folge ν, die bis zu einem
wissen Punkte gediehen ist, ohne durch das Gesetz Φ abgebrochen zu
n, auch ins Unbegrenzte hinaus so fortgesetzt werden kann, daß ihr
ses Schicksal niemals zu teil wird. Es muß also mit Φ ein zweites
setz X gegeben sein, zufolge dessen ν bei jedem weiteren Schritt seiner

Entwickelung, solange diese noch nicht durch Φ abgeschnitten ist, eine Zahl erzeugt von folgender Art: Wählt man die beim k-ten Wahlschritt von ν durch X erzeugte Zahl als die $(k+1)$-te Zahl von ν, so führt Φ, wenn es bis dahin nicht geschehen war, auch beim $(k+1)$-ten nicht die Hemmung des Entwicklungsprozesses von ν herbei.

Damit sind die Funktionsbegriffe hinreichend fixiert. Es sei aber noch einmal betont, daß in den Theoremen der Mathematik von Fall zu Fall einzelne bestimmte derartige Funktionen auftreten, niemals aber all-gemeine Sätze über sie aufgestellt werden. Die allgemeine Formulierung dieser Begriffe ist deshalb auch nur erforderlich, wenn man sich über Sinn und Verfahren der Mathematik Rechenschaft gibt; für die Mathematik selber, den Inhalt ihrer Lehrsätze, kommt sie gar nicht in Betracht.

3. Mathematische Sätze, Eigenschaften und Mengen.

Denn diese Sätze sind, sofern sie sich selbst genügen und nicht rein individuelle Urteile sind, allgemeine Aussagen über Zahlen oder Wahlfolgen von Zahlen, nicht aber über „Funktionen“. Wir unterscheiden demnach folgende Arten von Aussagen:

I. *Urteile im eigentlichen Sinne.*

II. *Generelle Aussagen.* Ihr Typus: Für jede natürliche Zahl n und jede frei werdende Wahlfolge ν besteht die Relation $C(n;\nu)$; Relation in dem scharfen Sinne eines von n abhängigen Charakters der Wahlfolge ν genommen.

III. *Abstrakta aus Urteilen oder generellen Aussagen.* Dabei kann das „es gibt“ auftreten in Verbindung mit Zahl, Folge, functio mixta und functio continua. Auf eine Folge kann es sogar in doppelter Weise bezogen sein, indem diese entweder als Folge im eigentlichen Sinne oder als Zuordnungsgesetz auftritt. Der erste Fall liegt z. B. vor, wenn $C(\nu)$ ein Charakter der frei werdenden Folge ν ist und nun der Satz formuliert wird: Es gibt eine Folge ν (d. i. selbstverständlich eine gesetzmäßig bestimmte), welcher der Charakter $C(\nu)$ zukommt. Der zweite liegt vor, wenn auf Grund einer Relation $R(mn)$ zwischen willkürlichen Zahlen m, n der Satz aufgestellt wird: Es gibt eine Folge φ, die aus jeder Zahl m eine Zahl $\varphi(m)$ erzeugt, derart, daß jede Zahl m die Eigenschaft $R(m, \varphi(m))$ besitzt. Da aber die Bedingung, daß die m-te Zahl einer Wahlfolge ν in der Beziehung R zur Zahl m steht, ein von m abhängiger Charakter von ν ist (es handelt sich dabei sogar um eine primitive f. m.), so ist der zweite als ein Sonderfall in dem ersten enthalten. Demnach können wir den Typus der Aussagen III. Art hinreichend allgemein durch folgendes Schema kennzeichnen: Es gibt eine Zahl n_0, eine Folge ν_0; außerdem ein

setz f, das aus jeder Folge ν eine Zahl $f(\nu)$ erzeugt, und ein Gesetz Φ, aus einer frei werdenden Folge ν eine werdende Folge $\nu' = \Phi(\nu)$ erugt, derart, daß für jede Zahl n und jede durch freie Wahlakte werdende lge ν die Beziehung $C(n_0\nu_0; n, f(\nu); \nu, \Phi(\nu))$ besteht; dabei ist $n_0\nu_0; nn'; \nu\nu'$) eine gegebene Relation zwischen den willkürlichen Zahlen n, n' und den Wahlfolgen ν_0, ν, ν'.

Gehen in die Aussagen dieser drei Arten noch unbestimmte Zahlen er Wahlfolgen ein, so entstehen Aussageschemata von *Eigenschaften* und *ziehungen* zwischen Zahlen oder Folgen. Im Gebiete der Eigenschaften ben wir demnach die gleichen drei Arten zu unterscheiden. Die unter I lenden Eigenschaften sind nichts anderes als die „Charaktere" in dem n uns festgelegten Sinne; diejenigen Eigenschaften also, die einer Zahl er Folge an sich zukommen oder nicht zukommen. Wir könnten sie „umfangs-definite" Eigenschaften den unter II. und III. fallenden mfangs-vagen" gegenüberstellen. Eine umfangs-definite Eigenschaft, einen arakter, wollen wir auch als *definite Menge* (Menge vom Typus I) bechnen. Von einer derartigen Menge darf man sagen, daß es an sich tsteht, ob ein Element ihr angehört oder nicht. Sind M, N zwei Zahlaraktere (definite Zahlmengen), so ist M eine Teilmenge von N, wenn le Zahl vom Charakter M auch den Charakter N besitzt; oder genauer: ir erklären ein Gesetz $(M; \overline{N})$, das aus einer willkürlichen Zahl n dann Zahl 2 (das „nein") erzeugt, wenn M ihr die 1, N die 2 zuordnet, in jedem andern Falle aber die 1; der Sinn der „Teilmengen"-Aussage der, daß jede Zahl den Charakter $(M; \overline{N})$ besitzt. Sie ist also eine ssage von der Form II. Ist M Teilmenge von N und N Teilmenge n M, so nennen wir M und N *identisch*. Entsprechendes ist über deite Mengen von Folgen oder die den Relationen korrespondierenden ehrdimensionalen" Mengen von Zahlen und Folgen zu bemerken. — an kann von der *Kardinalzahl* einer definiten Menge sprechen, muß h dann aber darüber klar sein, daß für diese Kardinalzahlen nicht einl der Satz gilt: Eine Kardinalzahl ist entweder $= 0$ oder $\geqq 1$; d. h. Zahlcharakter M erzeugt entweder aus jeder Zahl die 2 (die Menge ist leer, jede Zahl hat die Eigenschaft $\overline{M}$), oder aber es gibt eine Zahl, welcher das Gesetz M die 1 erzeugt (es gibt ein Element von M; es t eine Zahl, welche die Eigenschaft M besitzt). Der Zweifel an der ckenlosigkeit der Cantorschen $\aleph$ greift nach unserer jetzigen Auffasg also nicht erst bei $\aleph_1$, auch nicht erst bei $\aleph_0$ Platz, sondern schon ersten Beginn der Zahlenreihe: Die Behauptung, daß 1 die kleinste auf 0 gende Kardinalzahl ist, muß als grundlos zurückgewiesen werden. Mir eint daraus die mathematische Wertlosigkeit dieses Mächtigkeitsbegriffs rvorzugehen. Natürlich behalten die endlichen Kardinalzahlen ihr altes

gutes Recht, wo sie nicht auf eine „definite Menge" bezogen werden, sondern auf den Inbegriff einzelner gegebener Elemente (Zahlbegriff des täglichen Lebens).

Wir gehen zu den „umfangs-vagen" Eigenschaften der Art II über. Dabei ist folgendes zu beachten. Es sei $C(n; \nu)$ eine Relation zwischen Zahl n und Wahlfolge ν (z. B. diese: die n-te Zahl von ν ist ungerade). Die eine umfangs-vage Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von ν formulierende Aussage: Es besteht $C(n; \nu)$ für jedes n (alle Zahlen von ν sind ungerade), hat dann offenbar keinen Sinn mehr für eine *Wahlfolge* ν, sondern nur noch für eine ins Unendliche hinaus durch ein *Gesetz* bestimmte Folge. Ist nun $C'(\nu)$ ein Charakter, wie soll dann die Aussage interpretiert werden: „jeder Folge, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, kommt auch der Charakter C' zu"? „Jede Folge", das kann, wie wir wissen, nur heißen: jede durch freie Wahl werdende Folge; andrerseits kann die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ sinnvollerweise nicht von einer Wahlfolge, sondern nur von einer ins Unendliche hinaus bestimmten, fertigen Folge ausgesagt werden. Es ist nur diese Interpretation möglich: Ist $C(n; \nu)$ erfüllt für alle Zahlen n *bis zu einer gewissen von ν abhängigen Grenze*, so gilt auch $C'(\nu)$. Oder genau: Es bedeute $C^*(n; \nu)$ die Relation, welche zwischen n und ν besteht, wenn $C(m; \nu)$ für alle Zahlen m von 1 bis n erfüllt ist; dann gibt es eine functio mixta $f(\nu)$ von der Art, daß einer jeden Wahlfolge vom Charakter $C^*(f(\nu); \nu)$ auch der Charakter $C'(\nu)$ zukommt. Es handelt sich also um eine Aussage des Typus III. Wenn aber in der Erklärung einer Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von der Art II das „jeder" nicht wie hier bezogen ist auf „natürliche Zahl", sondern auf „Folge", ist eine analoge Interpretation der Natur der Sache nach nicht möglich. Nun hat der Eigenschafts- und Mengenbegriff nur soweit mathematische Bedeutung, als das *Identitätsprinzip* reicht, d. h. soweit mit der Aussage „jedes Element von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}'$ ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ irgend zwei Eigenschaften)" ein Sinn verknüpft werden kann. Infolgedessen entspringen aus Aussagen der Form II, in welche Unbestimmte eingehen, nur dann Mengen, wenn „jeder" lediglich in Verbindung mit „natürliche Zahl" auftritt. Wir werden also erklären: Bezeichnet e, sei es eine willkürliche Zahl, sei es eine willkürliche Folge, und $C(e; n)$ einen außer von e noch von der Zahl n abhängigen Charakter, so entspringt aus C eine „vage Menge" $[C]$; daß ein Element e ihr angehört, besagt, daß *jede* Zahl n zu e in der Relation $C(e; n)$ steht [Menge vom Typus II]. Für Mengen vom Typus I und II können wir nach der obigen Anweisung den Sinn des Terminus „Teilmenge" festlegen. Für den kompliziertesten Fall zweier unter den Typus II fallender Mengen von Folgen würde er diese Bedeutung haben:

ν gehört zu $[C]$ besage: jede Zahl n steht zu ν in der Relation $C(\nu; n)$;
ν „ „ $[C']$ „ „ „ n „ „ ν „ „ „ $C'(\nu; n)$.

$C']$ ist eine Teilmenge von $[C]$ besagt: Es gibt eine functio mixta $f(n; \nu)$ erart, daß die Urteilsanweisung zu Recht besteht: eine jede Zahl n und ne jede durch freie Wahlakte werdende Folge ν, welche zu allen Zahlen von 1 bis $f(n; \nu)$ in der Relation $C(\nu; m)$ steht, erfüllen miteinander e Relation $C'(\nu; n)$. Die Aussage ist demnach eine solche von der orm III. Für den Begriff der Teilmenge gilt der *Syllogismus*, das tranitive Gesetz: Ist M eine Teilmenge von M' und M' eine Teilmenge von $''$, so ist M eine Teilmenge von M''.

Wir kommen zu den Eigenschaften der III. Art, deren Erklärung ein s gibt" enthält. Nehmen wir da als Beispiel eine Eigenschaft von lgendem Bau. $C(ee')$ sei eine Relation, in welcher entweder e Zahl d e' Zahl oder e Folge und e' Zahl oder e Folge und e' Folge ist; besitzt die Eigenschaft (C), besage: es gibt eine Funktion $f(e)$, so daß $(e, f(e))$ besteht. Je nach den drei in Betracht kommenden Fällen wird ese Funktion natürlich eine functio discreta, mixta oder continua sein. as bedeutet, wenn (C') eine Eigenschaft vom gleichen Bau ist, die Aussge: jedes Element e von der Eigenschaft (C) besitzt die Eigenschaft $'$) oder: (C) ist Teilmenge von (C')? Offenbar dies: Es gibt ein Gesetz, s aus jeder Funktion f eine Funktion f' erzeugt, derart, daß, wenn $(e, f(e))$ besteht, auch $C'(e, f'(e))$ stattfindet; das Erzeugungsgesetz lbst kann dabei noch von e abhängen. Nun kann von einem derartigen esetz aber nur die Rede sein, wenn f eine functio discreta ist; an Stelle er willkürlichen Funktion f tritt dabei die durch freie Wahlen werdende olge. Nur solche Eigenschaften von der Art III also werden wir als engen ansprechen, in denen das „es gibt" in Verbindung mit „Folge", cht aber mit functio mixta oder continua auftritt. Dieses ist somit die pische Form der Erklärungen von Mengen der III. Art: Es sei $E(e, n\nu)$ ne Beziehung von der Art I (Relation) oder eine solche Beziehung von r Art II, der eine Menge korrespondiert, d. h. bei deren Erklärung das eder" nur in Verbindung mit „Zahl", nicht mit „Folge" auftritt; e nn Zahl oder Folge bedeuten, n eine willkürliche Zahl, ν eine Folge. besitzt die Eigenschaft (E) oder gehört der Menge (E) an, soll besagen: s *gibt* eine Zahl n und eine Folge ν von der Art, daß die Beziehung $(e; n\nu)$ stattfindet. Die allgemeine Formulierung des Teilmengenbegriffs r Mengen vom Typus I, II oder III bleibe dem Leser überlassen. Der llogismus erweist sich in allen Fällen als zu Recht bestehend.

Das sind die vom Identitätsprinzip gesteckten Grenzen, innerhalb deren ch umfangs-vage Eigenschaften von Zahlen oder Folgen als Mengen an-

zusprechen sind. Mengen aber von Funktionen und Mengen von Mengen wollen wir uns ganz aus dem Sinne schlagen. Kein Platz ist da in unserer Analysis für eine allgemeine Mengenlehre, so wenig wie für generelle Aussagen über Funktionen[3]).

Die neue Auffassung, sieht man, bringt sehr weitgehende Einschränkungen mit sich gegenüber der ins Vage hinausschwärmenden Allgemeinheit, an welche uns die bisherige Analysis in den letzten Jahrzehnten gewöhnt hat. Wir müssen von neuem Bescheidenheit lernen. Den Himmel wollten wir stürmen und haben nur Nebel auf Nebel getürmt, die niemanden tragen, der ernsthaft auf ihnen zu stehen versucht. Was haltbar bleibt, könnte auf den ersten Blick so geringfügig erscheinen, daß die Möglichkeit der Analysis überhaupt in Frage gestellt ist; dieser Pessimismus ist jedoch unbegründet, wie der nächste Abschnitt zeigen soll. Aber daran muß man mit aller Energie festhalten: *die Mathematik ist ganz und gar sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewegt, abhängig vom Wesen der natürlichen Zahl.*

In den hier gezogenen radikalen Konsequenzen stimme ich, soviel ich verstehe, nicht mehr ganz mit Brouwer überein. Beginnt er doch[4]) sogleich mit einer allgemeinen Funktionenlehre (unter dem Namen „Menge" tritt bei ihm auf, was ich hier als functio continua bezeichne), betrachtet Eigenschaften von Funktionen, Eigenschaften von Eigenschaften usf. und wendet auf sie das Identitätsprinzip an. (Mit vielen seiner Aussagen gelingt es mir nicht, einen Sinn zu verbinden.) Ich entlehne Brouwer 1. die

[3]) Ich will damit nicht sagen, daß allgemeine Aussagen über Mengen und Funktionen (mixtae et continuae) überhaupt unmöglich seien. So gilt gewiß für jede Folge ν und *jede f. m.* der Satz $f(\nu)+1=1+f(\nu)$. Aber ihre Allgemeinheit ist eine abgeleitete, durch formale Spezialisierung gewonnen aus der Allgemeinheit der Arithmetik und Analysis (im obigen Beispiel liegt die Gültigkeit der Gleichung $n+1=1+n$ für alle Zahlen n zugrunde); die Allgemeinheit der Arithmetik und Analysis ist hingegen eine wahrhaft originäre, sich stützend je auf ein eigenes anschauliches Fundament (vgl. S. 58) und darum auch von selbständigem anschaulichen Gehalt erfüllt. Man mag derartige Sätze über Funktionen und Mengen (vereinzelte Haltepunkte in einem völlig uferlosen Meer) zu einer besondern Disziplin unter dem Namen „Mengenlehre" vereinigen, aber sie ist keinesfalls das Fundament der Mathematik. — Analog kann man natürlich auch vereinzelte *besondere* Klassen von Zuordnungen zwischen functiones mixtae (oder continuae) stiften. Ist etwa φ eine gegebene f. d., so entsteht aus jeder $f(\nu)$ eine andere $f'(\nu)$ nach der Regel:

$f'(\nu)$ für $\nu=\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ ist gleich $f(\nu')$ für $\nu'=\{\varphi(n_1), \varphi(n_2), \varphi(n_3), \dots\}$.

Aber diese Zuordnung ist nur eine „Verkleidung" der Folge φ; wo gesagt wird: es *gibt* eine Zuordnung dieser Art, heißt das immer: es gibt eine Folge φ. Wir werden dafür sogleich Beispiele kennen lernen.

[4]) In der ersten der unter [1]) zitierten Abhandlungen über die „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom Satz vom ausgeschlossenen Dritten".

Grundlage, die in jeder Hinsicht das Wesentliche ist, nämlich die Idee der werdenden Folge und den Zweifel am principium tertii exclusi, 2. den Begriff der functio continua. Auf meine Rechnung kommen der Begriff der functio mixta und die Auffassung, welche ich in den folgenden drei Thesen zusammenfasse: 1. Der Begriff der Folge schwankt, je nach der logischen Verbindung, in welcher er auftritt, zwischen „Gesetz" und „Wahl", „Sein" und „Werden". 2. Die allgemeinen und Existentialsätze sind keine Urteile im eigentlichen Sinne, behaupten keinen Sachverhalt, sondern sind Urteilsanweisungen, bzw. Urteilsabstrakte. 3. Arithmetik und Analysis enthalten lediglich allgemeine Aussagen über Zahlen und frei werdende Folgen; keine allgemeine Funktionen- und Mengenlehre von selbständigem Inhalt!

Nachdem wir diese Rechenschafts-Ablegung über die logische Gestaltung der Wissenschaft vom Unendlichen beendet haben, ziehen wir im nächsten Abschnitt die Konsequenzen für das Kontinuumproblem.

4. Das Kontinuum.

Für den Begriff der reellen Zahl waren bisher in der Mathematik mehrere Erklärungen in Gebrauch, deren Äquivalenz man glaubte beweisen zu können. Von dem Standpunkt aus, den wir jetzt einnehmen, erscheinen diese Definitionen aber nicht mehr als äquivalent, und man überzeugt sich leicht, daß nicht der Dedekindsche Schnitt, sondern die in diesem II. Teil am Beginn zugrunde gelegte Definition jetzt die einzig mögliche bleibt (von der man wohl sagen darf, daß sie auch an sich das Wesen der reellen Zahl am reinsten ausspricht).

Die Dualintervalle unterschieden wir oben voneinander durch Angabe zweier ganzzahliger Charaktere $[m; h]$. Man kann sie leicht durch einen einzigen Charakter, der eine natürliche Zahl ist, ersetzen, wenn man nach irgendeinem bestimmten einfachen Gesetz die Paare ganzer Zahlen in eine abgezählte Reihe ordnet. Ferner können wir, wenn i irgendein Dualintervall ist, die in seinem Innern gelegenen Dualintervalle in natürlicher Weise in eine abgezählte Reihe ordnen. Ist i von h-ter Stufe, so setzen wir an erste Stelle das einzige, ganz im Innern von i gelegene Dualintervall der $(h+1)$-ten Stufe, darauf die 5 Intervalle der $(h+2)$-ten Stufe dieser Art, wie sie sich von links nach rechts auf der Zahlgeraden folgen, darauf die 13 Intervalle der $(h+3)$-ten Stufe usf. Man weiß sonach, was es heißt, wenn von „dem n-ten" der innerhalb i gelegenen Dualintervalle die Rede ist. Eine reelle Zahl ist bestimmt durch ein Gesetz, das aus jeder natürlichen Zahl n ein Dualintervall $i^{(n)}$ erzeugt, so zwar, daß immer $i^{(n+1)}$ innerhalb $i^{(n)}$ gelegen ist. Wollen wir uns hier von der Einschachtelungs-Bedingung unabhängig machen, so ersetzen wir die Angabe des $(n+1)$-ten Intervalls $i^{(n+1)}$ durch Angabe seiner Ordnungsnummer unter den inner-

halb $i^{(n)}$ gelegenen Dualintervallen; die reelle Zahl ist dann bestimmt durch Angabe des ersten Intervalls i und durch diese Folge der Ordnungsnummern, d. i. ein Gesetz, das aus jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl n_* erzeugt. Die Intervallfolge hebt an mit $i' = i$, darauf folgt das (1_*)-te der innerhalb i' gelegene Dualintervalle, i'', darauf das (2_*)-te innerhalb i'' gelegene, i''', usf. Die „beliebige reelle Zahl", die „reelle Variable" ist repräsentiert durch eine werdende Folge von Dualintervallen, wobei die Intervalle sukzessive frei gewählt werden unter der einen Einschränkung, daß bei jedem folgenden Schritt ein innerhalb des zuletzt gewählten gelegenes Intervall ausgesucht werden muß. Will man diese an eine Vorschrift gebundene Wahl durch eine völlig freie ersetzen, so muß man nicht die Intervalle, sondern statt ihrer wie oben die Ordnungsnummern wählen. — Unter *Intervallfolge* ist von jetzt ab immer eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle zu verstehen.

Zwei reelle Zahlen α, β *fallen zusammen*, wenn allgemein $i_\alpha^{(n)}$, das n-te Intervall der Folge α, und das n-te Intervall der Folge β sich ganz oder teilweise überdecken; sie *liegen getrennt*, wenn eine natürliche Zahl n existiert, so daß $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\beta^{(n)}$ völlig getrennt liegen. Diese beiden Möglichkeiten bilden keine vollständige Alternative; ist doch keine von beiden eine definite Beziehung zwischen den willkürlichen reellen Zahlen α und β. Das ist dem Charakter des anschaulichen Kontinuums völlig angemessen; denn in ihm geht das Getrenntsein zweier Stellen beim Zusammenrücken sozusagen graduell, in vagen Abstufungen, über in die Ununterscheidbarkeit. Wohl aber gilt der Satz: Fällt α mit β zusammen und β mit γ, so fällt auch α mit γ zusammen. Zwar brauchen ja von drei Intervallen $i_\alpha^{(n)}$, $i_\beta^{(n)}$, $i_\gamma^{(n)}$, deren beide erste und deren beide letzte übereinandergreifen, das erste und dritte nicht sich zu überdecken. Tritt das hier aber an einer bestimmten Stelle n unserer Intervallfolgen ein, so müßten im weiteren Fortgang ihrer Entwicklung entweder die Intervallfolgen α und β oder die Folgen β und γ sich voneinander trennen. Unser Satz behauptet, explizite ausgesprochen: Es gibt eine von der natürlichen Zahl n abhängige Funktion $f(n; \alpha\beta\gamma)$ von drei werdenden Wahlfolgen $\alpha\beta\gamma$, welche aus den Argumenten allemal dann eine bestimmte natürliche Zahl m erzeugt, wenn $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\beta^{(n)}$ einerseits, $i_\beta^{(n)}$ und $i_\gamma^{(n)}$ anderseits sich überdecken, $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\gamma^{(n)}$ aber getrennt liegen, und zwar so, daß folgendes gilt: Wie auch die Intervallfolgen α, β, γ über die n-te Stelle hinaus sich entwickeln mögen, an m-ter Stelle sind entweder $i_\alpha^{(m)}$ und $i_\beta^{(m)}$ getrennt oder $i_\beta^{(m)}$ und $i_\gamma^{(m)}$. Die Konstruktion dieser Funktion f ist natürlich sehr einfach. Der in Frage stehende Satz beruht, wie man zugleich erkennt, nicht darauf, daß α, β, γ „Näherungszahlen" sind, sondern daß die Annäherung *über jede Grenze* getrieben werden kann. Insofern dies für ein anschaulich gegebenes Kon-

nuum nicht der Fall ist (man denke etwa an das bekannte Beispiel der okalisation von Druckempfindungen, welche durch Berührung der Hand- äche mit den beiden Spitzen eines Zirkels hervorgerufen werden), kommt der „Transitivität" des Zusammenfallens die an der Wirklichkeit vor- enommene *mathematische Idealisierung* zum Ausdruck. — Das Kontinuum rscheint hier als ein nach innen hinein ins Unendliche werdendes. In er anschaulich gegebenen Wirklichkeit ist der Werdeprozeß nur bis zu nem gewissen Punkte gediehen (denn das Gegebene *ist*, es *wird* nicht) nd mündet darüber hinaus graduell in völlige Ungeschiedenheit; in der lathematik hingegen betrachten wir ihn als einen ins Unendliche fort- ehenden. *Auf jeden Fall aber ist es unsinnig, das Kontinuum als ein ertig-Seiendes zu betrachten.* Man kann darum allen Ernstes behaupten nd muß es sogar), daß das Gegenwärtige nicht etwas in sich fertig Be- immtes ist, sondern selbst noch nach innen hinein *wird*, indem es sich der Zukunft entfaltet; erst „am Ende aller Zeiten" sozusagen ist jedes tück der Weltwirklichkeit, auch das von mir jetzt durchlebte, in sich räzise bestimmt. Dieser Umstand erscheint mir sehr wichtig für die Ab- hätzung der metaphysischen Bedeutung der Naturkausalität; jedoch ist er nicht der Ort, darauf einzugehen.

Greifen wir auf der Zahlgeraden C, dem Variabilitätsgebiet einer reellen ariablen x, einen bestimmten Punkt heraus, z. B. $x = 0$, so kann man, ie wir sahen, keinesfalls behaupten, daß jeder Punkt entweder mit ihm usammenfällt oder von ihm getrennt liegt. Der Punkt $x = 0$ zerlegt also as Kontinuum C durchaus nicht in zwei Teile $C^- : x < 0$ und $C^+ : x > 0$, dem Sinne, daß C aus der Vereinigung von C^-, C^+ und dem einen unkte 0 bestünde (jeder Punkt entweder mit 0 zusammenfiele oder zu C^- der zu C^+ gehörte). Erscheint dies dem heutigen Mathematiker mit seiner omistischen Denkgewöhnung anstößig, so war es in früheren Zeiten eine len selbstverständliche Ansicht: innerhalb eines Kontinuums lassen sich ohl durch Grenzsetzung Teilkontinuen erzeugen; es ist aber unvernünftig, behaupten, daß das totale Kontinuum aus der Grenze und jenen Teil- ntinuen zusammengesetzt sei. *Ein wahrhaftes Kontinuum* ist eben ein sich Zusammenhängendes und *kann nicht in getrennte Bruchstücke auf- teilt werden*; das widerstreitet seinem Wesen. C^+ ist ein Kontinuum in em gleichen Sinne wie C: Medium freien Werdens; auch bei seiner mathe- atischen Erfassung müssen wir daher nicht von den Punkten, sondern n den Intervallen ausgehen. Ihm liegt zugrunde das System Σ^+ der- nigen Dualintervalle, deren erste Charakteristik m positiv ist. Ein Gesetz, s aus jeder natürlichen Zahl ein Intervall dieses Systems erzeugt, und ar so, daß die Intervalle der Folge ineinander eingeschachtelt sind, fert eine bestimmte Zahl im Kontinuum C^+; Wahlakte, welche an

das System Σ^+ und die Einschachtelungsbedingung gebunden, im übrigen aber frei sind, erzeugen eine werdende Folge, welche „die im Bereich O^+ sich bewegende Variable" darstellt. Man wird hier gewahr, daß „Punktmengen", welche als Variabilitätsgebiet für Funktionsargumente in Betracht kommen, immer nur Verkleidungen von „Intervallmengen", genauer von definiten Intervallmengen sein können. Nur über derartige Punktmengen ist aber auch eine allgemeine Theorie innerhalb der Analysis möglich, da sie unter die Rubrik der functiones discretae fallen. Neben dem System Σ^+ trat oben das System Σ^- der Dualintervalle auf, deren erste Charakteristik $m < 0$ ist, und drittens das System Σ^0 der durch $m = 0$ charakterisierten Dualintervalle. Σ^+, Σ^-, Σ^0 bestimmen bzw. das Kontinuum der „rechts von 0 gelegenen", der „links von 0 gelegenen" und der „mit 0 zusammenfallenden" Punkte.

Betrachten wir jetzt eine der gewöhnlichen, auf eine reelle Variable x anzuwendenden Operationen, z. B. x^2. — Aus mehreren Dualbrüchen $a, a', \ldots$ in endlicher Anzahl kann man leicht das einzige Dualintervall höchster Stufe konstruieren, welches jene Dualbrüche alle enthält; dies Intervall bezeichnen wir mit $(a, a', \ldots)$. Sind

$$a = \frac{m-1}{2^h}, \quad a' = \frac{m+1}{2^h}$$

die Endpunkte eines Intervalls i, so liegen die Quadrate aller Dualbrüche, welche in das Intervall i hineinfallen, ihrerseits in dem Intervall

$$i^2 = (a^2, aa', a'^2).$$

Ist eine reelle Zahl α gegeben durch eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle, so erhält man die Zahl α^2, indem man von jedem Intervall i der Folge das „Quadratintervall" i^2 bildet. Die Entstehung von α^2 aus α beruht also nicht auf der Zuordnung von *Intervallfolgen*, sondern einfach auf der Zuordnung von *Intervallen*: es handelt sich um das Gesetz, das aus jedem Intervall i das Intervall i^2 erzeugt; dies Gesetz nennen wir „die Funktion x^2". Läßt man eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle i durch freie Wahl Schritt für Schritt entstehen, so entspricht ihr nach diesem Gesetz eine werdende Folge von gleichfalls ineinander eingeschachtelten Intervallen i^2. In ähnlicher Weise erklären wir die Funktion $x \cdot y$ (die Operation der *Multiplikation*) im Gebiet von zwei Variablen x, y. Diesem Variabilitätsgebiet liegt zugrunde das System der durch drei ganzzahlige Charakteristiken $m, n; h$ voneinander zu unterscheidenden „Dualquadrate" mit den Eckpunkten

$$x = \frac{m \pm 1}{2^h}, \quad y = \frac{n \pm 1}{2^h}.$$

etzen wir

$$a = \frac{m-1}{2^h}, \quad a' = \frac{m+1}{2^h}; \quad b = \frac{n-1}{2^h}, \quad b' = \frac{n+1}{2^h},$$

o erzeuge man aus diesem Quadrat J das Intervall

$$\pi(J) = (ab, a'b, ab', a'b').$$

Dieses Gesetz π ist die Funktion $x \cdot y$; durchläuft J eine werdende Folge neinander eingeschachtelter Quadrate, so $\pi(J)$ eine werdende Folge ininander eingeschachtelter Intervalle.

Interpretieren wir endlich noch die im Gebiete zweier Variablen x, y ültige Identität

$$(*) \qquad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Ein Paar Dualbrüche a, b nennen wir „den Schnittpunkt von a mit b". Sind $a, a', \ldots$ mehrere (z. B. drei) gegebene Dualbrüche und st daneben noch eine zweite Reihe von endlichielen (z. B. vier) Dualbrüchen $b, b', \ldots$ gegeben, o können wir das kleinste Dualquadrat bilen, das die sämtlichen $(3 \cdot 4)$ Schnittpunkte on $a, a', \ldots$ mit $b, b', \ldots$ enthält:

$$J = (aa' \ldots | bb' \ldots).$$

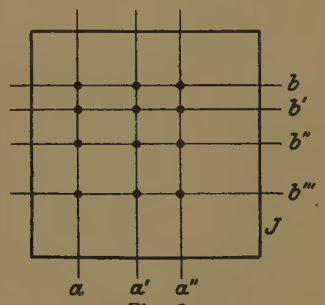

Fig. 2.

Die Funktion

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

t das Gesetz, welches aus jedem Dualquadrat J, dessen Ecken die Schnittunkte von a, a' mit b, b' sind, das Quadrat

$$J' = (a+b, a'+b, a+b', a'+b' | a-b, a'-b, a-b', a'-b')$$

rzeugt; aus ihm werde das Intervall i gebildet nach dem Gesetz $x' \cdot y'$ das eben mit π bezeichnet wurde). Damit ist die linke Seite von $(*)$ onstruiert. Analog rechts: Man bildet aus J zunächst das Quadrat

$$J^2 = (a^2, aa', a'^2 | b^2, bb', b'^2)$$

das ist die Funktion $x'' = x^2$, $y'' = y^2$] und daraus das Intervall $\bar{i}$ nach em Gesetze $x'' - y''$. Die Gleichung $(*)$ behauptet, daß, welches auch as Dualquadrat J sein mag, *i und $\bar{i}$ sich stets überdecken.*

Die angeführten Beispiele legen uns den allgemeinen Begriff der *stetigen unktion* einer reellen Veränderlichen nahe. Eine solche Funktion wird estimmt nicht durch ein beliebiges Gesetz, das einer werdenden Intervallolge eine werdende Intervallfolge zuordnet, sondern durch ein Gesetz, nach elchem einfach jedes Dual*intervall* (sobald es einmal hinreichend klein eworden ist) ein Intervall erzeugt. Das entspricht auch vollkommen dem nn, wie dieser Begriff in den Anwendungen der Mathematik gebraucht

wird: sobald das Argument *mit einem gewissen Grad der Genauigkeit* gegeben ist — und anders ist es in den Anwendungen ja nie gegeben —, ist auch der Funktionswert mit einem zugehörigen Grad von Genauigkeit bekannt. Der letztere sinkt mit dem ersteren unter jede Grenze (wenn die Funktion in einem beschränkten Intervall betrachtet wird). Die stetigen Funktionen sind demnach nur verkleidete „functiones discretae"; und nur darum kann die Analysis eine allgemeine Theorie über sie aufstellen. Eine stetige Funktion, erklären wir, ist bestimmt durch ein Gesetz φ, das aus jedem Dualintervall i entweder nichts oder ein ebensolches Intervall, $\varphi(i)$, erzeugt. Es gehört ferner dazu ein Gesetz, aus jedem Intervall i eine natürliche Zahl n_i erzeugend, von folgender Art: Ist i irgendein Dualintervall, n eine natürliche Zahl $\geqq n_i$, so erzeugt das n-te derjenigen Dualintervalle, welche im Innern von i gelegen sind, nach dem Gesetz φ bestimmt ein Intervall (und nicht nichts), das überdies im Innern von $\varphi(i)$ liegt, falls $\varphi(i)$ existiert. — Die Einschachtelungsbedingung hat zur Folge, daß zwei übereinandergreifenden Intervallen i, i' stets zwei übereinandergreifende Intervalle $\varphi(i), \varphi(i')$ entsprechen; denn nach dieser Bedingung kann man stets ein im Innern beider Intervalle i, i' enthaltenes Dualintervall $\bar{i}$ konstruieren, dessen Bild $\varphi(\bar{i})$ existiert und im Innern sowohl von $\varphi(i)$ wie $\varphi(i')$ liegt. Ist α eine einzelne reelle Zahl, d. i. eine durch ein Gesetz ins Unendliche hinaus bestimmte Schachtelfolge von Intervallen $i, i', i'', \ldots$, so bilden wir die Folge $\varphi(i), \varphi(i'), \varphi(i''), \ldots$; aus ihr fallen natürlich die nicht-existierenden Bildintervalle heraus, außerdem aber streichen wir in ihr auch ein Intervall, falls es nicht im Innern des nächstvorhergehenden enthalten ist; wegen der zu jedem Intervall i gehörigen Zahl n_i bleibt dabei doch eine unendliche Folge stehen. Die so präparierte Bildfolge ist also wiederum eine reelle Zahl $\beta = \varphi(\alpha)$: der *Wert* der stetigen Funktion für den Argumentwert α. Fallen die beiden reellen Zahlen α und α' zusammen, so fallen auch die zugehörigen Funktionswerte β und β' zusammen. — Zwei stetige Funktionen stimmen überein, wenn sie durch Gesetze bestimmt sind, die jedem Dualintervall zwei übereinandergreifende Intervalle zuordnen[5]).

Wie man sieht, kann man den Begriff der stetigen Funktion in einem beschränkten Intervall nicht erklären, ohne die *gleichmäßige Stetigkeit* und die *Beschränktheit* sogleich in die Definition mit aufzunehmen. Vor allem aber *kann es gar keine andern Funktionen in einem Kontinuum geben als stetige Funktionen.* Wenn die alte Analysis die Bildung unstetiger

[5]) Von der *einzelnen bestimmten* stetigen Funktion war hier die Rede. Die allgemeinen Sätze über sie handeln aber von dem Kontinuum, in das sie sich einbetten: der (als einer werdenden zu betrachtenden) *willkürlichen* stetigen Funktion. Das nähere Eingehen auf diesen Begriff würde uns hier zu weit führen.

unktionen ermöglichte, so bekundet sie damit am deutlichsten, wie weit e von der Erfassung des Wesens des Kontinuums entfernt ist. Was man eute eine unstetige Funktion nennt, besteht in Wahrheit (und auch das t im Grunde nur eine Rückkehr zu älteren Anschauungen) aus *mehreren* unktionen in getrennten Kontinua. Wir fassen z. B. die oben eingeführten ontinua C, $C^+(x > 0)$ und $C^-(x < 0)$ ins Auge. Die Funktion $f_1(x) = x$ C^+ ist das Gesetz, das jedem Dualintervall, dessen beide Endpunkte ositiv sind, dies Intervall selbst zuordnet. Die Funktion $f_2(x) = -x$ C^- ist das Gesetz, das jedem Dualintervall i, dessen beide Endpunkte a, a' negativ sind, das Intervall $-i = (-a', -a)$ zuordnet. Zu diesen eiden Funktionen existiert eine einzige Funktion $|x|$ in ganz C, welche in C^+ it f_1, in C^- mit f_2 übereinstimmt; sie ordnet einem Dualintervall i das ntervall i zu, falls beide Endpunkte von i positiv sind, $-i$, falls beide ndpunkte negativ sind, einem Intervall i mit den Endpunkten $a\,a'$ aber, as den Nullpunkt enthält, das Intervall $(-a', -a, a, a')$. Betrachten ir hingegen die beiden Funktionen $+1$ in C^+, -1 in C^-, so existiert ı ihnen *keine* in ganz C definierte Funktion, welche in C^+ mit der einen. C^- mit der andern übereinstimmte.

Der bisherigen Analysis erschien das Kontinuum als die Menge seiner unkte; sie sah in ihm nur einen Spezialfall des logischen Grundverhältisses von *Element und Menge*. Wem wäre es nicht schon aufgefallen, aß das ebenso fundamentale Verhältnis von *Ganzem und Teil* bislang in er Mathematik überhaupt keine Stelle hatte? *Daß es Teile hat*, ist aber ie Grundeigenschaft des Kontinuums; und so macht die Brouwersche heorie (im Einklang mit der Anschauung, gegen welche der heutige Atomismus" so arg verstößt) dieses Verhältnis zur Grundlage für die athematische Behandlung des Kontinuums. Darin liegt der eigentliche rund für das im vorhergehenden (bei der Abgrenzung von Teilkontinuen wohl wie bei der Bildung stetiger Funktionen) eingeschlagene Verfahren, as nicht von den *Punkten*, sondern den *Intervallen* als den primären onstruktionselementen ausgeht. — Freilich: auch eine Menge besitzt Teile. as sie aber im Reich des „Teilbaren" auszeichnet, ist die Existenz der Elemente" im mengentheoretischen Sinne, d. h. von *Teilen, welche selbst eine Teile mehr enthalten*; und zwar ist in jedem Teil mindestens ein Element" enthalten. Hingegen gehört es zum Wesen des Kontinuums, aß *jedes seiner Teile sich unbegrenzt weiter teilen läßt*; der Begriff des unktes muß als Grenzidee betrachtet werden, „Punkt" ist die Vorstellung er *Grenze* einer ins Unendliche fortgesetzten Teilung. — Um den stetigen usammenhang der Punkte wiederzugeben, nahm die bisherige Analysis, sie ja das Kontinuum in eine Menge isolierter Punkte zerschlagen atte, ihre Zuflucht zu dem *Umgebungs*begriff. Aber da in der daraus

hervorgehenden Allgemeinheit der Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit mathematisch unfruchtbar blieb, mußte hernach als einschränkende Bedingung die Möglichkeit der „Triangulation“ hinzugefügt werden[6]). Im Gegensatz zu diesem Aufbau erschienen in den kurzen Erklärungen, welche Brouwer seinen bekannten Beweisen der grundlegenden Sätze der Analysis situs vorausschickte[7]), schon deutlich die einfach zusammenhängenden Stücke, aus denen die Mannigfaltigkeit zusammengesetzt wird, als die ursprünglich gegebenen Bausteine. Die neue Analysis läßt nur diesen Weg offen.

Deuten wir kurz an, wie sich danach die mathematische Definition des Begriffes der *zweidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit* gestaltet. Zunächst ist das Schema ihres *topologischen Aufbaues* anzugeben, das ich als ein „zweidimensionales Gerüst“ bezeichne. Es besteht aus endlichvielen „Ecken“ e_0 (Elementen 0-ter Stufe), „Kanten“ e_1 (Elementen 1. Stufe), „Flächenstücken“ e_2 (Elementen 2. Stufe), die durch irgendwelche Symbole gekennzeichnet werden mögen. Jedes Flächenstück wird von gewissen Kanten, jede Kante von gewissen Ecken „begrenzt“; die Angaben darüber bilden den wesentlichen Inhalt des Schemas. Es muß gewissen leicht zu formulierenden Forderungen genügen. — Von den Flächenstücken des Gerüstes gelangt man zu den Punkten der Mannigfaltigkeit durch einen unendlich oft zu wiederholenden *Teilungsprozeß*. Diesen wollen wir so vornehmen, daß wir jede Kante durch einen ihrer Punkte in zwei Kanten zerlegen, darauf jedes Flächenstück von einem willkürlich in ihm gewählten Zentrum aus durch Linien nach den auf seiner Begrenzung gelegenen Ecken in Teildreiecke zerlegen. Diesen Vorgang kann man in abstracto so beschreiben: Jedem Element e_i des ursprünglichen Gerüstes G entspricht ein Element 0-ter Stufe $(e_i)'_0$ des durch Teilung entstehenden Gerüstes G'; zwei Elemente e_i, e_k $(i > k)$ des ursprünglichen Gerüstes, von denen das eine das andere begrenzt, erzeugen ein Element 1. Stufe $(e_i e_k)'_1$ des neuen Gerüstes G', das begrenzt wird von $(e_i)'_0$ und $(e_k)'_0$; drei Elemente $e_2 e_1 e_0$ von G, die einander begrenzen, ein von $(e_2 e_1)'_1, (e_2 e_0)'_1, (e_1 e_0)'_1$ begrenztes Element 2. Stufe $(e_2 e_1 e_0)'_2$ von G'. — Die Flächenstücke von G und die durch sukzessive Teilungen entstehenden Flächenstücke von $G', G'', \ldots$ spielen hier die gleiche Rolle wie diejenigen Intervalle im Linearkontinuum, in welche dasselbe durch die Dualbrüche von der Form $\frac{m}{2}, \frac{m}{2^2}, \frac{m}{2^3}, \ldots$

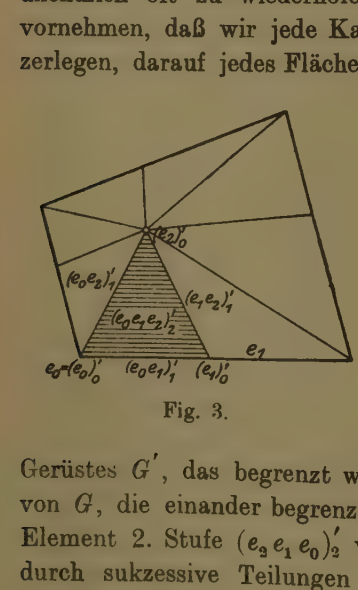

Fig. 3.

[6]) Siehe z. B. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913), § 4.
[7]) Siehe vor allem Math. Ann., 71 (1912), S. 97.

durchläuft alle ganzen Zahlen) zerlegt wird. Je zwei aneinanderstoßende n ihnen fügten wir zu einem „Dualintervall" zusammen, um auf jeder eilungsstufe eine Bedeckung des Linearkontinuums durch übereinander-eifende Stücke zu bekommen. Analog fassen wir hier diejenigen Flächen-icke eines der durch Teilung entstandenen Gerüste G, G', G'', ..., welche n einem gemeinsamen Eckpunkt begrenzt werden, zu einem „Stern" zu-mmen. Unter einem *Punkt der Mannigfaltigkeit* ist eine unendliche olge solcher Sterne zu verstehen, in welcher jeder Stern ganz im Innern s nächstvorhergehenden enthalten ist; der Sinn dieser Einschachtelungs-dingung zwischen zwei Sternen ist leicht zu formulieren.

Eine offene Mannigfaltigkeit unterscheidet sich von einer geschlossenen r darin, daß das zugrunde liegende Gerüst nicht aus endlichvielen, sondern ner unendlichen Folge von Elementen besteht. Das früher ausführlich trachtete Linearkontinuum fällt unter diesen Begriff, sofern wir als ualintervalle allein die Intervalle $\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right)$ mit einer *positiven* Charak-ristik h gelten lassen. Diese Modifikation kann an allen unseren bis-rigen Entwicklungen ohne weiteres angebracht werden. Der Begriff der etigen Funktion ist gleich so gefaßt worden, daß er sich auf beliebige annigfaltigkeiten übertragen läßt: Eine stetige Abbildung einer Mannig-ltigkeit auf eine andere wird bestimmt durch ein Gesetz, das jedem Stern r ersten entweder nichts oder einen Stern der zweiten zuordnet; es kommt nzu die gleiche Einschachtelungs-Bedingung wie früher. Hier ist es rklich wesentlich, daß die Alternative des „nichts" offen gelassen wird, ja das Bildgebiet eines Sternes der ersten Mannigfaltigkeit nicht in nem einzigen Stern der zweiten Platz zu finden braucht.

Sobald man es mit einer in irgendeinem Kontinuum sich bewegenden riablen zu tun hat, muß man sich, der neuen Theorie gemäß operierend, er dem Kontinuum sozusagen in der Schwebe halten und hat nicht wie her die Möglichkeit, sich auf einem einzelnen, wenn auch willkürlichen nkte niederzulassen. Dem an das letzte Verfahren Gewöhnten mag solche mutung zunächst unbequem erscheinen; aber jeder wird spüren, wie treu ch hierin die neue Analysis dem anschaulichen Charakter des Kontinuums h anpaßt. Die Brouwersche Auffassung verbindet höchste intuitive *Klar-t* mit *Freiheit*. Wer immer sich im abstrakten Formalismus der Mathe-tik noch einigen Sinn für anschauliche Gegebenheiten erhalten hat, auf den ß sie wirken wie eine Erlösung von bösem Albdruck. Endlich sei noch rauf hingewiesen, wie vollkommen beide Teile der neuen Lehre, die *schauliche* Angepaßtheit ans Kontinuum und ihre *logische* Stellungnahme den generellen und den Existentialsätzen, sich gegenseitig fordernd, inandergreifen.

(Eingegangen am 9. Mai 1920.)

Zur Tensoralgebra.

Von

Roland Weitzenböck in Graz.

Einleitung.

Es seien in einem dreidimensionalen euklidischen Raume x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes x. Die drei Gleichungen $x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$ bestimmen im Raume eine Affinität, der die Bilinearform

$$P_1(x, y) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k$$

eindeutig zugeordnet ist. Ist neben P_1 eine Reihe von Punkten $x, y, z, \ldots$ gegeben, so kann man nach allen rationalen Funktionen J der $a_{ik}, x_i, y_i, \ldots$ fragen, die bei Drehungen des Achsenkreuzes $0(x_1, x_2, x_3)$ ungeändert bleiben. Es sind dies *die orthogonalen oder Drehungsinvarianten* des Tensors P_1 und der Vektoren $x, y, \ldots$ (mit den skalaren Komponenten $x_i, y_i, \ldots$). Wir geben im folgenden eine vollständige Antwort auf diese Frage[1]).

Zunächst einige Worte zur üblichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes.

Die Tensoralgebra ist die Theorie der affinen und orthogonalen Invarianten von p-linearen Formen $P = \sum a_{ikl\ldots} x_i y_k \ldots$, die wir Tensoren p-ter Stufe nennen[2]). Es ist für den algebraischen Standpunkt hierbei völlig nebensächlich, ob man bei dem Worte „Tensor" an die Form P oder an die Gesamtheit der Zahlen $a_{ik\ldots}$ oder (bei $p = 2$) an die durch P

[1]) Die Invarianten von P allein gibt vollständig G. Rabinowitsch, Rend. di Palermo, **36** (1913), S. 99–110.

[2]) Mit H. Weyl, Raum, Zeit, Materie; Springer (1918). Andere Autoren sagen Affinoren und gebrauchen das Wort Tensor nur bei symmetrischen Affinoren. Ein spezieller Name für diese Formen ist hier am Platze, da es sich um Formen mit *inhomogenen* Variablen handelt.

ebene Affinität oder an eine durch P in Zeichen festgelegte physika-
ie Realität denkt. Es sind (glücklicherweise) bisher fast ausschließlich
Tensoren 2. Stufe und von diesen nur die einfachsten Drehungsinva-
ten behandelt worden. Aber auch da wurde schon viel gesündigt.
einfachsten Operationen werden als besondere „Multiplikationen“ oder
rknüpfungen“ eingeführt, es wird eine ganze Naturgeschichte der
hungsinvarianten aufgebaut. Man muß sich mit H. Weyl[3]) nachdrück-
st gegen diese „Orgien des Formalismus“ verwahren[4]). Der Forma-
us in der Benennungsweise wird durch den der Bezeichnungsweise
übertroffen.

§ 1.

Aufgabestellung.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem $0(x)$. Eine ortho-
ale Transformation

$$T \ldots x_i' = h_{i1} x_1 + h_{i2} x_2 + h_{i3} x_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad |h_{ik}| = \pm 1$$

net jedem Punkte x einen Punkt x' zu, wobei der Vektor x (= Strecke
) in den gleichlangen Vektor x' übergeht. Ist die Determinante $|h_{ik}|$
ch $+1$, so ist T eine Drehung.

Eine Bilinearform (= Tensor 2. Stufe)

$$P_1(x, y) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k$$

hrt durch (1) ebenfalls eine Transformation

$$P_1(x, y) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k = \sum_i \sum_k a'_{ik} x'_i y'_k = P'_1(x', y').$$

Die ∞^3 Transformationen T bilden eine gemischte dreigliedrige Gruppe,
Gruppe der Drehungen und Spiegelungen G.

Eine Fundamentalaufgabe der Tensoralgebra läßt sich dann folgender-
Ben formulieren:

---

[3]) H. Weyl, l. c. (1918), Schluß des § 6.

[4]) Eine kleine Auslese bezügl. der Namen: Ein Tensor zweiter Stufe heißt auch
nor (Jung), dyadic (Gibs-Wilson), Tensortripel (Voigt), komplette Dyade
umann), asymmetrischer Tensor (R. H. Weber), Diatensor (Budde), vektori-
Homographie (Burali-Forti, Marcolongo); für spezielle Tensoren gibt es
die Namen: Deviator (Schouten), Antitensor (Budde), Axiator (Spielrein),
nfaktor (Gibbs), Versor (Gibbs, Spielrein), Perversor (Gibbs) usw. Eine
reiche Zusammenstellung einiger dieser Begriffsbildungen findet man bei E. Jahnke.
niv d. Math. u. Physik, 25 (1917), S. 310–328.

Gegeben der Tensor (2) *und eine Reihe von Vektoren* $x, y, z, \ldots$ *Es sind alle ganzen rationalen Funktionen* $J(a_{ik}, x_i, y_i, \ldots)$ *anzugeben die bei der Gruppe G invariant bleiben*:

$$J(a_{ik}, x_i, y_i, \ldots) = J(a'_{ik}, x_i, y'_i, \ldots). \tag{4}$$

Diese Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn wir ein System von Funktionen $J_1, J_2, \ldots, J_\varrho$ angeben können, derart, daß jedes J ganz und rational durch diese Invarianten darstellbar ist. Dieses System $J_1, J_2, \ldots,$ heißt dann *ein vollständiges System von Drehungsinvarianten* des Tensors und der Vektoren $x, y, \ldots$

Wir geben im folgenden die Lösung dieses Problems. Für Leser, denen die Symbolik der Invariantentheorie nicht geläufig ist (die hier in ihrer einfachsten Weise Verwendung findet), sei folgendes vorausgeschickt: (xy) bedeutet das „innere" Produkt der Vektoren x und y, also die Invariante $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$; (xyz) ist das „äußere" Produkt der drei Vektoren x, y und z, also die Invariante $\mathrm{Det}\,|x_1\,y_2\,z_3|$.

Den Tensor $P_1(x, y) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k$ schreiben wir als symbolisches Produkt $(ax)(ay)$ der beiden Linearformen (ax) und (ay). Es ist dann $a_i a_k$ gleich der Zahl a_{ik} und $(ax)(ay)$ ist die konjugierte Bilinearform $P_1(y, x)$. Bei Funktionen, die nicht linear in den a_{ik} sind, muß man statt der Symbole a, α äquivalente Symbole b, β; c, γ usw. einführen, da sonst der Übergang zu den Koeffizienten $a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = \ldots$ nicht eindeutig ist. So ist z. B. $J_2 = (a\beta)(\alpha b)$ eine Invariante vom 2. Grad in den a_{ik}, die man erhält, wenn man $(a\beta)(\alpha b) = (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3)(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3)$ ausmultipliziert und dann $a_i\alpha_k = a_{ik}$, $b_i\beta_k = b_{ik} = a_{ki}$ usw. setzt.

§ 2.

Invariantentypen.

Wir zählen vorerst alle *Typen* von Invarianten auf, auf die sich alle Invarianten des Tensors (2) und einer Reihe von Vektoren $x, y, z, \ldots$ zurückführen lassen. Es sind deren 21, davon sind die 7 ersten Invarianten von P_1 allein. Den Beweis für die Vollständigkeit dieser Typen und der nachstehenden Systeme deuten wir kurz am Schlusse der Arbeit an (§ 6).

$$\text{(5a)} \quad \begin{cases} J_1 = (a\alpha), & J_2 = (a\beta)(b\alpha), \; J_3 = (a\beta)(b\gamma)(c\alpha), \; J_4 = (ab)(\beta c)(\gamma\delta)(d\ldots) \\ & J'_2 = (ab)(\beta\alpha), \; J'_3 = (a\beta)(bc)(\gamma\alpha), \; J_6 = (a\alpha\beta)(b\gamma)(cd)(\delta\ldots) \end{cases}$$

$$\text{(5b)} \quad \begin{cases} P_0(x, y) = (xy), \quad P_1(x, y) = (xa)(\alpha y), \\ Q_1(x, y) = (xa)(\alpha b)(\beta y), \quad Q_2(x, y) = (xa)(\alpha\beta)(by), \quad Q_3(x, y) = (xa)(\ldots) \\ R_1(x, y) = (x\alpha)(ab)(\beta c)(\gamma y), \quad V_2(x, y) = (x\alpha)(a\beta)(bc)(\gamma d)(\ldots) \end{cases}$$

$T_1 = (a\alpha x)$, $T_3 = (a\alpha b)(\beta c)(\gamma x)$, $T_4 = (a\alpha b)(\beta\gamma)(cd)(\delta x)$,
$T_2 = (a\alpha b)(\beta x)$, $T_3' = (a\alpha b)(\beta\gamma)(cx)$, $T_5 = (a\alpha b)(\beta\gamma)(cd)(\delta e)(\varepsilon x)$,

$$H_3 = (abx)(\alpha y)(\beta c)(\gamma z),$$

$J_0 = (xyz)$, $G_2 = (xya)(\alpha b)(\beta z)$, $G_5 = (xya)(\alpha\beta)(bc)(\gamma z)$,
$J_1 = (xya)(\alpha z)$, $G_3 = (xya)(\alpha\beta)(bz)$, $G_6 = (xy\alpha)(a\beta)(bc)(\gamma d)(\delta z)$.

Diese Typen sind für den konjugierten Tensor $P_1(y, x)$ dieselben. e ersten sechs Invarianten von (5a) gestatten die Vertauschung der einischen mit den griechischen Buchstaben, sind also für $P_1(y, x)$ gleichtend. Bei J_6 erhält man für $P_1(y, x)$ die Invariante

$$J_6' = (a\alpha b)(\beta c)(\gamma\delta)(d\varepsilon)(ef\varphi)$$

d dies läßt sich durch (5a) so ausdrücken [vgl. (19)]:

$$J_6 + J_6' = \tfrac{2}{3}\cdot\Delta\cdot J_1\cdot(J_2' - J_2) + \tfrac{1}{3}\cdot\Delta\cdot(J_3 - J_3') - \Delta''^2 + (J_2' + J_1^2)[J_4 + \tfrac{2}{3}J_1J_3 - 2J_1J_3' + J_1^2J_2' - \tfrac{1}{2}J_2^2 - \tfrac{1}{6}J_1^4].$$

Es ist dann $J_6 = J_6'$ die Bedingung dafür, daß $P_1(x, y)$ durch eine ehung in $P_1(y, x)$ übergeführt werden kann.

§ 3.
Vollständige Systeme.

Aus den Typen (5) erhält man unschwer die vollständigen Systeme. r den Tensor $P_1(x, y)$ allein haben wir die 7 Invarianten (5a). Das adrat von J_6 läßt sich ganz und rational durch (5a) ausdrücken entrechend der einen Gleichung, die zwischen den 7 Größen (5a) bestehen ß, da ein allgemeiner Tensor gegenüber Drehungen nur 6 absolute varianten besitzt[5]).

Tritt zu dem Tensor $P_1(x, y)$ ein Vektor x hinzu, so erhält man für vollständige System neben den 7 Invarianten (5a) noch die 14 genden:

$$\begin{cases} 7 \text{ Invarianten (5b) für } x = y \\ 6 \text{ Invarianten (5c)} \\ 1 \text{ Invariante (5d) für } x = y = z. \end{cases}$$

[5]) Bei Rabinowitsch, l. c. § 4, sind die Koeffizienten der Linearformen T_2 und T_3 (in (5c)) die Komponenten von Vektoren a, a_1 und a_2. Die skalaren dukte dieser Vektoren geben die Invarianten:

$$I_4\alpha = a^2 = (ab)(\alpha\beta) - (a\beta)(\alpha b) = J_2' - J,$$
$$I_5\alpha = a\cdot a_1 = (a\alpha b)(\beta c\gamma) = J_3 - J_3' + J_1J_2' - J_1J_2,$$
$$I_6\alpha = a_1^2 = J_2J_2' - \tfrac{1}{2}J_2^2 + \tfrac{1}{6}J_1^4 - J_1^2J_2 + \tfrac{4}{3}J_1J_3 - J_4.$$

Invariante a_2^2 ist mit J_6' identisch. Ferner ist: $I_1\alpha = J_1$, $I_2\alpha = \tfrac{1}{2}(J_1^2 - J_2)$ und $= \tfrac{1}{6}(J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3)$.

Bei zwei Vektoren x und y haben wir 57, bei drei Vektoren 12[illegible] Invarianten. Über die Anzahl der einzelnen Typen gibt die folgend[illegible] Tabelle Aufschluß.

Grund-formen	Typen (5a)	Typen (5b)	Typen (5c)	Typen (5d)	Typen (5e)	Anzahl der Invarianten
P_1	7	—	—	—	—	7
P_1, x	7	7	6	1	—	21
P_1, x, y	7	24	12	4	10	57
P_1, x, y, z	7	51	18	8	41	125

§ 4.

Spezielle Fälle.

Wir sprechen kurz von dem Verhalten der Invarianten (5a) be[illegible] speziellen Tensoren.

Eine symmetrische Bilinearform

$$P_1(x,y) \equiv P_1(y,x) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i y_k$$

hängt von 6 Konstanten ab, hat also nur 3 absolute Drehungsinvarianten[illegible] Diese sind $J_1, J_2 = J_2'$ und $J_3 = J_3'$. J_4 und J_6 werden reduzibel:

$$(9) \qquad \begin{cases} J_4 = \frac{1}{6}(J_1^4 - 6 J_1^2 J_2 + 8 J_1 J_3 + 3 J_2^2), \\ J_6 = 0. \end{cases}$$

Die Kovariante $T_1(x) = (a\alpha x)$ verschwindet identisch. Bei einem[illegible] symmetrischen Tensor mit verschwindendem J_1 (Deviator) gibt es nur di[illegible] beiden Invarianten J_2 und J_3. Es ist hier $J_4 = \frac{1}{2} J_2^2$.

Gleichfalls nur von 5 Konstanten abhängig ist eine zerfallende Bi[illegible] linearform (Dyade). Es sind dann in $P_1(x,y) = (ax)(\alpha y)$ die a_i und α_k keine Symbole mehr, sondern gewöhnliche komplexe Zahlen. Die beiden Invarianten sind $J_1 = (a\alpha)$ und $J_2' = (aa)(\alpha\alpha)$. Alle anderen werden reduzibel:

$$(10) \qquad J_2 = J_1^2, \quad J_3 = J_1^3, \quad J_3' = J_1 J_2', \quad J_4 = J_1^2 J_2', \quad J_6 = 0.$$

Bei einer schief- oder antisymmetrischen Bilinearform (Antitensor[illegible] Axiator) gibt es nur eine Drehungsinvariante

$$J_2' = -J_2 = 2(a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2$$

alle anderen verschwinden.

§ 5.

Drehungen.

Etwas ausführlicher sei der Fall behandelt, daß die durch $P_1(x, y)$ gebene Affinität

1) $$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k = a_i(\alpha x)$$

ne Drehung ist. Der Tensor $P_1(x, y)$ wird dann auch als vektorielle omerie (Burali-Forti, Marcolongo) oder als Versor (Spielrein) bezeichnet. Es ist in diesem Falle $Q_2 \equiv Q_3 \equiv P_0$:

2) $$(x a)(\alpha\beta)(b y) \equiv (x\alpha)(a b)(\beta y) \equiv (x y),$$

raus die bekannten Gleichungen folgen:

3) $$(a b)\alpha_i\beta_k = (\alpha\beta) a_i b_k = \delta_{ik} \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k, \\ 1 \text{ für } i = k. \end{cases}$$

Hier gibt es nur eine einzige Invariante

$$J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

e Determinante $\Delta = |a_{ik}|$ ist $= \varepsilon = \pm 1$. Der Drehungswinkel φ ist geben durch

4) $$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}(J_1 - \varepsilon).$$

Die weiteren Invarianten sind:

5) $$\begin{cases} J_2 = J_1^2 - 2\varepsilon J_1 = 4\cos^2\varphi - 1, \\ J_3 = J_1^3 - 3\varepsilon J_1^2 + 3\varepsilon = 8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi + \varepsilon, \\ J_2' = J_4 = 3, \qquad J_3' = J_1 = 2\cos\varphi + \varepsilon, \\ J_6 = -J_1^3 + 2\varepsilon J_1 + 3 = -4\cos^2\varphi + 4. \end{cases}$$

Die Drehaxe ist durch T_1 gegeben. Es bestehen ferner neben (12) Gleichungen:

6) $$\begin{cases} Q_1(x, x) = P_1(J_1 + \varepsilon) - P_0 \cdot \varepsilon \cdot J_1, \\ R_4(x, x) = P_1, \qquad V_2(x, x) = P_0 = (x x), \\ T_1^2 = T_2^2 = T_3^3 = T_4^2 = T_5^2 = (\varepsilon + J_1)[2P_1 + P_0(\varepsilon - J_1)], \\ T_2 = \varepsilon T_1, \qquad T_3 = T_3' = T_1, \\ T_4 = T_2, \qquad T_5 = T_1, \qquad H = T_1(P_0 + \varepsilon P_1). \end{cases}$$

§ 6.

Zur Ableitung der Typen.

Die Herleitung der in den §§ 2 und 3 angeführten Systeme gründet h auf die beiden Fundamentalsätze der symbolischen Methode für die

projektiven Invarianten ternärer Formen bezüglich derjenigen dreigliedrigen Gruppe, deren lineare Transformationen die ternäre Form $P_1 = (xx) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariant lassen.

Der erste dieser Sätze[6]) sagt aus, daß jede derartige Invariante als Produkt von Faktoren (uvw) und (uv) darstellbar ist. In unserem Falle sind $u, v, \ldots$ die Reihen $a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots; x, y, z, \ldots$.

Der zweite Fundamentalsatz sagt aus[7]), daß alle ganzen rationalen Relationen zwischen den Invarianten J eine Folge der beiden Identitäten sind:

$$(17) \qquad (uvw)(sx) \equiv (svw)(ux) - (suw)(vx) + (suv)(wx),$$

$$(18) \qquad (uvw)\cdot(xyz) \equiv \begin{vmatrix} (ux) & (uy) & (uz) \\ (vx) & (vy) & (vz) \\ (wx) & (wy) & (wz) \end{vmatrix}.$$

Die Beziehung (17) ergibt sich aus dem Verschwinden der vierreihigen Determinante $|u_1 v_2 w_3 (sx)|$; (18) ist der Multiplikationssatz für Determinanten.

Aus (18) folgen die Gleichungen (vgl. (5a)):

$$(19) \qquad \begin{cases} \Delta = 6\,|a_{ik}| = (abc)(\alpha\beta\gamma) = J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3, \\ \Delta' = (a\beta\gamma)(\alpha bc) = J_1^3 - J_1J_2 - 2J_1J_2' + 2J_3', \\ \Delta'' = (a\alpha b)(\beta c\gamma) = J_3 - J_3' + J_1(J_2 - J_2'). \end{cases}$$

Bildet man $\Delta \cdot (xy) = (abc)(\alpha\beta\gamma)(xy)$ und wendet (17) auf $(\alpha\beta\gamma)(xy)$ an, so entsteht $\Delta \cdot (xy) = 3(abc)(x\beta\gamma)(\alpha y)$. Wenn man hierin $(abc)(x\beta\gamma)$ nach (18) ausmultipliziert, so ergibt sich:

$$(20) \qquad (xa)(\alpha b)(\beta c)(\gamma y) = \tfrac{1}{6}\Delta(xy) - \tfrac{1}{2}(J_1^2 - J_2)P_1(x,y) + J_1 Q_1(x,y).$$

Dies ist die sogenannte „charakterische Gleichung" für die durch $P_1(x,y)$ gegebene Affinität. Sie zeigt die Reduzibilität von Invarianten, die ein Faktorenpaar $(\alpha b)(\beta c)$ enthalten.

Verfahren wir mit $\Delta''(xy)$ ebenso, so ergibt sich

$$(21) \qquad \begin{aligned} R_2(x,y) = (xa)(\alpha b)(\beta\gamma)(cy) &= -(y\alpha)(ab)(\beta c)(\gamma x) \\ &+ T_1(x)\cdot T_2(y) + J_1 Q_2(x,y) + J_1 Q_3(x,y) \\ &+ (xy)(\tfrac{1}{3}\Delta - \Delta'') - \tfrac{1}{2}(J_1^2 - J_2)[P_1(x,y) + P_1(y,x)]. \end{aligned}$$

[6]) D. Hilbert, Math. Ann. **36** (1890), S. 471–534; H. Burkhardt, Math. Ann. **43** (1893), S. 197–215; E. Study, Leipz. Ber. **49** (1897), S. 442–461; R. Weitzenböck, Wiener Denkschriften, **89** (1913), S. 709–732.

[7]) E. Pascal, Rendic. Lincei (4), IV (1888), S. 119–124; Mem. Lincei (4), V (1888), S. 375–387; E. Study, l. c. [6]) und: Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig (1889); R. Weitzenböck, l. c. [6]).

Diese Identität gibt die Zurückführung von $(ab)(\beta\gamma)$ auf $(ab)(\beta c)$. ltipliziert man schließlich $T_1(x)\cdot T_2(y)$ nach (18) aus, so erhält man:

$$R_3(x,y) = (xa)(\alpha\beta)(bc)(\gamma y) = R_4(y,x) - R_4(x,y) - T_1(x)T_2(y) + J_1 Q_1(x,y) + (J_2' - \tfrac{1}{2}J_1^2 - \tfrac{1}{2}J_2)P_1(x,y) + \tfrac{1}{6}\Delta\cdot(xy).$$

rdurch wird auch ein Faktorenpaar $(\alpha\beta)(bc)$ auf die Anordnung $(ab)(\beta c)$ ückgeführt.

Nun untersucht man vorerst kettenartige Ausdrüeke

$$K = (xa)(\alpha.)(..)\ldots(..)(my),$$

denen die in Klammern gesetzten Punkte Symbolreihen bedeuten. rartige Ausdrücke sind mit Hilfe der eben angeführten Identitäten auf Typen (5b) reduzierbar.

Schließlich hat man noch in ähnlicher Art die Invarianten zu beadeln, die einen Faktor (uvw) enthalten. Wegen (18) kann man stets einen solchen Faktor voraussetzen. Wir haben trotzdem (aus Symtriegründen) die Invariante J_6 (5a) mit Verwendung von zwei derigen Faktoren geschrieben.

Graz, am 12. April 1920.

(Eingegangen am 5. Mai 1920).

Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

1. Behauptung und Gang des Beweises.

Die Herren Hardy, Littlewood und der Verf. haben, unabhängig voneinander und auf verschiedenen Wegen, zum Teil parallel laufende Untersuchungen über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 angestellt[1], indem sie dabei insbesondere den Fall ins Auge faßten, wo die zu untersuchende Zahlenreihe aus den Werten eines reellen Polynoms $\varphi(z)$ für die ganzzahligen Argumente $z = 1, 2, 3, \ldots$ besteht. Eine entscheidende Rolle bei diesen Untersuchungen spielt der Satz, daß

$$\sum_{h=0}^{n} e^{2\pi i \varphi(h)} = o(n) \tag{1}$$

ist, wenn der höchste Koeffizient von $\varphi(z)$ irrational ist. Aus (1) folgt

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{e^{2\pi i \varphi(h)}}{h} = o(\lg n). \tag{2}$$

Das Ziel, das sich Hardy und Littlewood ursprünglich gestellt hatten, war der Beweis der für die Riemannsche ζ-Funktion im $\lim t = \infty$ gültigen Abschätzung

$$\zeta(1+ti) = o(\lg t), \tag{3}$$

während ich aus ganz anderer Richtung, von dem astronomischen Problem der „mittleren Bewegung" her, zu der gleichen Fragestellung geführt wurde. Auf die ζ-Funktion angewendet, liefert meine Methode das über (3) hinausgehende Gesetz

$$\zeta(1+ti) = O\left(\frac{\lg t}{\lg \lg t}\right). \tag{4}$$

[1]) Acta Mathematica, 37, S. 155–191 und S. 193–239; Math. Ann., 77 (1916), S. 313–352 (im folgenden zitiert als „G. V.").

s kommt dabei nur der eine Hauptgedanke jener Methode (der zu em Hilfssatz 2 der gegenwärtigen Note führt) zur Geltung; das arithetisch-transzendente Prinzip, das in G. V. die Grundlage aller Entwickngen bildet [2]), braucht zum Beweise von (4) *nicht* herangezogen zu werden. s zeigt sich so, daß überhaupt der Zusammenhang der beiden Gesetze 2) und (3) nur ein ziemlich lockerer ist und dem Inhalt von (3) insesondere jenes zahlentheoretische Moment fehlt, das bei (1) den Hauptiz und die Hauptschwierigkeit bildet.

Hilfssatz 1. *Mit einem Fehler, der absolut unterhalb einer festen renze bleibt, ist*

$$\zeta(1+ti) \text{ gleich } \Sigma(t) = \sum_{n=1}^{[t]} \frac{e^{-ti\lg n}}{n}.$$

Die Beziehung von $\Sigma(t)$ zur Summe (2) ergibt sich aus der Bemerkung, daß sich $\lg n$ gemäß dem Taylorschen Lehrsatz auf weite trecken der Summationsvariablen n wie ein Polynom verhält. Wollen ir in einer Summe $\sum_n$ je H aufeinanderfolgende Glieder zusammenfassen, o bringen wir das dadurch zum Ausdruck, daß wir n in die Gestalt

$$H\nu + h \qquad (\nu \text{ ganz}; \ h = 0, 1, 2, \ldots, H-1)$$

etzen, wodurch $\sum_n$ sich in $\sum_\nu \sum_h$ verwandelt. In unserm Falle ist

$$\lg(H\nu+h) = \left\{\lg(H\nu) + \frac{h}{H\nu} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(H\nu)^2} + \ldots \pm \frac{1}{q}\frac{h^q}{(H\nu)^q}\right\} \mp \frac{1}{q+1}\frac{h^{q+1}}{(H\nu+\vartheta h)^{q+1}}$$
$$(0 < \vartheta < 1).$$

er zwischen $\{\}$ geschriebene Hauptteil der endlichen Taylorreihe ist ein olynom $\varphi_\nu(h)$ in h vom q-ten Grade; das Restglied ist absolut

$$< \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{\nu^{q+1}}.$$

ir können also mit einem Fehler, der prozentual sehr klein ist,

$$e^{-ti\lg(H\nu+h)} \text{ durch } e^{-ti\varphi_\nu(h)}$$

setzen, solange ν^{q+1} ein großes Vielfaches von t, d. h. ν ein großes Vielches von $t^{\frac{1}{q+1}}$ ist. Wir werden dementsprechend $\Sigma(t)$ in Teilsummen on der Form

$$\Sigma_{(q)} = \sum_{n=1+\left[t^{\frac{1}{q+1}}\right]}^{\left[t^{\frac{1}{q}}\right]} \frac{e^{-ti\lg n}}{n} \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots)$$

[2]) Math. Ann., 77, S. 315.

spalten und können dann in $\Sigma_{(q)}$ den Logarithmus durch das eben eingeführte Polynom q-ten Grades φ_ν ersetzen, wenn wir H in solche Abhängigkeit von t bringen, daß es schwächer gegen ∞ konvergiert als jede positive Potenz von t und in $\Sigma_{(q)}$ noch von den am Anfang stehenden Gliedern absehen, für welche $\frac{n}{H}$ nicht groß gegenüber $t^{\frac{1}{q+1}}$ ist. Für die Summe dieser Anfangsglieder werden wir einfach die aus der trivialen Abschätzung

$$\left|\frac{e^{-ti\lg n}}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}$$

sich ergebende obere Grenze benutzen. Zur Behandlung des Hauptteils aber verwende ich den meiner Arbeit G. V. entlehnten

Hilfssatz 2. *Sei*

$$\varphi(z) = \alpha z^q + \alpha_1 z^{q-1} + \ldots + \alpha_q$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom q-ten Grade, $Q = 2^q$, H eine ganze positive Zahl. Dann gilt für die Summe

$$\sigma = \sum_{h=0}^{H-1} e^{i\varphi(h)}$$

die Abschätzung

$$|\sigma|^Q < (2H)^{Q-q-1} \cdot \sum_{\mathfrak{r}} (H - |\mathfrak{r}|)\, e^{i\alpha q!\, r_1 r_2 \ldots r_q}.$$

In der Summe rechts durchläuft der „Gitterpunkt“

$$\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_q)$$

mit den ganzzahligen Koordinaten r_i im q-dimensionalen Raum den durch

$$|\mathfrak{r}| = |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_q| \leqq H - 1$$

definierten „oktaedrischen“ Bereich.

Wir werden dadurch zu folgendem Ergebnis gelangen:

Hilfssatz 3. *Es ist*

$$|\Sigma_{(q)}| < \frac{q+2}{q+1} \cdot 2^q \lg\lg t$$

für alle ganzen positiven q und alle reellen t oberhalb einer von q unabhängigen Grenze.

Aus ihm erschließen wir (4) in wenigen Zeilen. Es ist nämlich

$$\Sigma(t) = \sum_{n=1}^{\left[t^{\frac{1}{q+1}}\right]} \frac{e^{-ti\lg n}}{n} + \{\Sigma_{(1)} + \Sigma_{(2)} + \ldots + \Sigma_{(q)}\}.$$

r erste Teil rechts ist absolut

$$\leqq \sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{t^{\frac{1}{q+1}}}\right]} \frac{1}{n} < 1 + \int_1^{t^{\frac{1}{q+1}}} \frac{dx}{x} = 1 + \frac{\lg t}{q+1}.$$

r zweite zufolge unseres Hilfssatzes für hinreichend große t

$$< \frac{3}{2}(2^1 + 2^2 + \ldots + 2^q) \lg\lg t < 3 \cdot 2^q \lg\lg t.$$

ähle ich nun

$$q = \left[\frac{\lg\lg t - 3\lg\lg\lg t}{\lg 2}\right],$$

finde ich

$$|\Sigma(t)| < 1 + \frac{\lg 2 \cdot \lg t}{\lg\lg t - 3\lg\lg\lg t} + 3\frac{\lg t}{(\lg\lg t)^2};$$

thin

$$\limsup \left| \zeta(1+ti) : \frac{\lg t}{\lg\lg t} \right| \leqq \lg 2.$$

Aus unsern Abschätzungen geht hervor, daß zum Wert der Summe $\Sigma(t)$ erster Linie die „Anfangsglieder" beitragen, für welche $\frac{\lg n}{\lg t}$ verschwindend ein ist; in zweiter Linie diejenigen, für die $\frac{\lg n}{\lg t}$ unmittelbar oberhalb er reziproken ganzen Zahl liegt; in dritter Linie alle übrigen. Von wie ringem Belang die letzteren sind, geht daraus hervor, daß

$$\sum_{n=1+[t^\alpha]}^{\left[\frac{1}{t^q}\right]} \frac{e^{-ti\lg n}}{n} = O(t^{-\delta})$$

, wenn α eine beliebige feste, zwischen $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{q+1}$ gelegene Zahl ist d δ ein gewisser von α, nicht jedoch von t abhängender positiver Exponent.

2. Beweis der Hilfssätze.

Beweis von Hilfssatz 1[3]). Für einen Argumentwert $s = \sigma + ti$ t (positivem Imaginärteil t und) einem Realteil $\sigma > 1$ ist

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} = s\int_n^{n+1} \frac{n+1-x}{x^{1+s}}\,dx$$

[3]) Diese einfache, natürlich längst bekannte Überlegung wird nur der Voll-ndigkeit halber reproduziert.

ist, fällt der absolute Betrag der auf der linken Seite stehenden Differenz für Argumente der angegebenen Art

$$< |s| \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\sigma} = |s| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

aus. Bedeutet m irgendeine ganze positive Zahl, so ist daher

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^s} \right| \leqq \frac{|s|}{m}.$$

Anderseits ist

$$\int_m^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} m^{1-s},$$

und das ist dem absoluten Betrage nach $< \frac{1}{t}$. Daher wird

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| < \frac{|s|}{m} + \frac{1}{t}.$$

Wählen wir $m = 1 + [t]$, so kommt

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{[t]} \frac{1}{n^s} \right| = \left| \sum_{n=1+[t]}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leqq \frac{|s|}{t} + \frac{1}{t} \leqq \frac{\sigma+t}{t} + \frac{1}{t} = 1 + \frac{1+\sigma}{t}.$$

Diese Abschätzung behält aber offenbar aus Stetigkeitsgründen ihre Gültigkeit auch noch für $\sigma = 1$:

$$\left| \zeta(1+ti) - \sum_{n=1}^{[t]} \frac{e^{-ti \lg n}}{n} \right| \leqq 1 + \frac{2}{t} \leqq 2 \quad \text{für} \quad t \geqq 2.$$

Beweis von Hilfssatz 2. Unter H_q verstehen wir die Anzahl der Gitterpunkte $\mathfrak{r}$, welche dem oktaedrischen Bereich $|\mathfrak{r}| \leqq H - 1$ angehören; es ist

$$H_q \leqq (2H-1)^q < (2H)^q. \tag{5}$$

1. Schritt. Die Konjugierte von

$$\sigma = \sum_{h=0}^{H-1} e^{i\varphi(h)}$$

ist

$$\bar{\sigma} = \sum_{h=0}^{H-1} e^{-i\varphi(h)}.$$

Multiplikation ergibt

$$|\sigma|^2 = \sigma\bar{\sigma} = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{k=0}^{H-1} e^{i\varphi(h)} \cdot e^{-i\varphi(k)} = \sum_{h,k} e^{i(\varphi(h) - \varphi(k))}.$$

h setze $h = k + r$; dann wird

$$\varphi(h) = \varphi(k+r) = \varphi(k) + r\varphi(r,k).$$

(r,k) ist eine ganze rationale Funktion von r und k, die nur Glieder $-1)$-ter oder niederer Ordnung enthält; die Entwicklung nach fallen-n Potenzen von k beginnt mit dem Term $q\alpha k^{q-1}$. Wir haben jetzt

$$|\sigma|^2 = \sum_r \sum_k e^{ir\varphi(r,k)}.$$

er Summationsbereich wird beschrieben durch

$$0 \leqq k \leqq H-1, \qquad 0 \leqq k+r \leqq H-1.$$

durchläuft mithin das ganze Intervall von $-(H-1)$ bis $+(H-1)$, d in der inneren Summe durchläuft k für jedes solche r die sämtlichen nzen Zahlen des Intervalls von 0 bis $H-1-|r|$ oder von $|r|$ bis $H-1$, nachdem $r \geqq 0$ oder $r \leqq 0$ ist.

2. Schritt. Aus (6) ergibt sich mit Hilfe der sog. Schwarzschen ngleichung $\left\{\text{in der Form } \left|\sum_r 1 \cdot u_r\right|^2 \leqq \sum_r 1 \cdot \sum_r |u_r|^2\right\}$:

$$|\sigma|^4 \leqq H_1 \sum_r \left|\sum_k e^{ir\varphi(r,k)}\right|^2.$$

nmehr wiederhole ich das beim ersten Schritt befolgte Verfahren. Es ist

$$\left|\sum_k e^{ir\varphi(r,k)}\right|^2 = \sum_{k,l} e^{ir(\varphi(r,k)-\varphi(r,l))}.$$

iederum schreibe ich

$$k = l + s; \qquad \varphi(r,k) = \varphi(r,l+s) = \varphi(r,l) + s\varphi(r,s,l).$$

e ganze rationale Funktion $\varphi(r,s,l)$ von r, s und l enthält nur Glie-r der Ordnung $\leqq q-2$ und beginnt bei der Entwicklung nach absteigen-n Potenzen von l mit dem Term $q(q-1)\alpha l^{q-2}$. Jetzt haben wir also

$$|\sigma|^4 \leqq H_1 \sum_{r,s} \sum_l e^{ir\varphi(r,s,l)}.$$

$, s)$ durchläuft hier das zweidimensionale „Oktaeder"

$$|r| + |s| \leqq H-1$$

d l dasjenige Intervall, welches aus dem oben geschilderten Summations-tervall von k entsteht, wenn man hinten oder vorn $|s|$ Zahlen abstreicht, nachdem $s \geqq 0$ oder $s \leqq 0$ ist.

Der 3. Schritt beginnt mit abermaliger Anwendung der Schwarzschen ngleichung, welche liefert

$$|\sigma|^8 \leqq H_1^2 H_2 \sum_{r,s} \Big| \sum_{l} e^{\cdots} \Big|^2$$

und geht dann in der gleichen Weise weiter wie oben.

Wir müssen diesen Prozeß fortsetzen bis zur Ausführung des q-ten Schrittes[4]). Dazu wollen wir die Summationsbuchstaben $h, k, l, \ldots; r, s, \ldots$ lieber durch Indizes unterscheiden, etwa so:

$$h_1 = r_1 + h_2;\ \varphi(h_1) \quad = \varphi(h_2) \quad + r_1 \varphi(r_1, h_2),$$
$$h_2 = r_2 + h_3;\ \varphi(r_1, h_2) \quad = \varphi(r_1, h_3) \quad + r_2 \varphi(r_1, r_2, h_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_q = r_q + h;\ \ \varphi(r_1, \ldots, r_{q-1}, h_q) = \varphi(r_1, \ldots, r_{q-1}, h) + r_q \varphi(r_1, \ldots, r_q, h).$$

Es enthält $\varphi(r_1, \ldots, r_i, h_{i+1})$ nur Glieder von der Ordnung $\leqq q - i$ und beginnt bei Entwicklung nach fallenden Potenzen von h_{i+1} mit dem Term

$$q(q-1)\ldots(q-i+1)\,\alpha\, h_{i+1}^{q-i}.$$

Insbesondere, ergibt sich daraus, ist $\varphi(r_1, \ldots, r_q, h)$ von seinen $q+1$ Argumenten unabhängig, nämlich gleich der Konstanten $q!\,\alpha$. Wir finden, wenn noch

$$\mathsf{H} = H_1^{3^{q-2}} H_2^{2^{q-3}} \ldots H_{q-2}^2 H_{q-1}$$

gesetzt wird,

$$|\sigma|^Q \leqq \mathsf{H} \cdot \sum_{\mathfrak{r}} \sum_{h} e^{i\alpha q! r_1 r_2 \ldots r_q}.$$

Darin durchläuft $\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_q)$ das „Oktaeder" $|\mathfrak{r}| \leqq H - 1$, h aber ein von $\mathfrak{r}$ abhängiges Intervall von $H - |\mathfrak{r}|$ ganzen Zahlen; dasselbe entsteht dadurch aus dem von 0 bis $H-1$ reichenden Intervall, daß man von ihm der Reihe nach $(i = 1, 2, \ldots, q)$ jedesmal $|r_i|$ Zahlen hinten oder vorn abstreicht, je nachdem $r_i \geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist. Aus (5) folgt

$$\mathsf{H} < (2H)^{Q-q-1},$$

weil

$$1 \cdot 2^{q-2} + 2 \cdot 2^{q-3} + 3 \cdot 2^{q-4} + \ldots + (q-1) \cdot 2^0 = Q - q - 1.$$

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 2 erbracht.

Beweis von Hilfssatz 3. Wir schreiten zur Untersuchung der Summe

$$\Sigma_{(q)} = \sum_{n=1+\left[t^{\frac{1}{q+1}}\right]}^{\left[t^{\frac{1}{q}}\right]} \frac{e^{-ti\lg n}}{n}$$

[4]) Statt ihn, wie in G. V., schon beim $(q-1)$-ten Schritt abzubrechen.

r einen reellen Wert $t \geqq 1$. H und n_0 bedeuten ganze Zahlen $\geqq 2$, eren Produkt

$$Hn_0 > t^{\frac{1}{q+1}}$$

t. Außerdem setze ich

$$n_1 = \left[\frac{1}{H} t^{\frac{1}{q}}\right].$$

n Falle $n_1 < n_0$ ist

$$[t^{\frac{1}{q}}] \leqq Hn_0 - 1$$

nd daher

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \Sigma_1 = \sum_{n=1+\left[t^{\frac{1}{q+1}}\right]}^{Hn_0-1} \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{1+[t^{\frac{1}{q+1}}]} + \int_{t^{\frac{1}{q+1}}}^{Hn_0} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{1+[t^{\frac{1}{q+1}}]} + \left\{\lg Hn_0 - \frac{1}{q+1}\lg t\right\}.$$

t $n_1 = n_0$, so gilt

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \Sigma_1 + \Sigma_3, \quad \text{wo} \quad \Sigma_3 = \sum_{n=Hn_1}^{\left[t^{\frac{1}{q}}\right]} \frac{1}{n}.$$

t endlich $n_1 > n_0$, so haben wir

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \Sigma_1 + |\Sigma_2| + \Sigma_3 \quad \text{mit} \quad \Sigma_2 = \sum_{n=Hn_0}^{Hn_1-1} \frac{e^{-ti\lg n}}{n}.$$

$_3$ besteht aus höchstens H Gliedern, die $\leqq \frac{1}{Hn_1}$ sind. In dem allein Betracht kommenden Falle $n_1 \geqq n_0$ ist daher

$$\Sigma_3 \leqq \frac{1}{n_1} \leqq \frac{1}{n_0}.$$

nter allen Umständen gilt folglich

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{1+[t^{\frac{1}{q+1}}]} + \left\{\lg Hn_0 - \frac{1}{q+1}\lg t\right\} + |\Sigma_2|. \tag{7}$$

Die Hauptaufgabe ist, eine hinreichend genaue obere Grenze für den bsoluten Betrag von Σ_2 zu finden. Es ist

$$\Sigma_2 = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{e^{-ti\lg(Hn+h)}}{Hn+h}.$$

ir vernachlässigen im Nenner h gegenüber Hn, bilden also

$$\Sigma' = \frac{1}{H} \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \left\{\frac{1}{n} \sum_{h=0}^{H-1} e^{-ti\lg(Hn+h)}\right\}.$$

Der begangene Fehler ist

$$(8)\quad |\Sigma_2 - \Sigma'| \leqq \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sum_{h=0}^{H-1} \left\{ \frac{1}{Hn} - \frac{1}{Hn+h} \right\} \leqq \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{h}{(Hn)^2} \leqq \frac{1}{2} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Indem wir $\lg(Hn+h)$ in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von h entwickeln und mit der q-ten Potenz abbrechen, erhalten wir ein Polynom $\varphi_n(h)$ vom q-ten Grade; es ist

$$|\lg(Hn+h) - \varphi_n(h)| < \frac{1}{q+1} \frac{h^{q+1}}{(Hn)^{q+1}}.$$

Daher

$$|e^{-ti\lg(Hn+h)} - e^{-ti\varphi_n(h)}| < \frac{t}{q+1} \cdot \frac{h^{q+1}}{(Hn)^{q+1}}.$$

Bilden wir

$$\Sigma'' = \frac{1}{H} \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{H-1} e^{-ti\varphi_n(h)} \right\} = \frac{1}{H} \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \frac{\sigma_n}{n},$$

so ist also, da noch

$$\sum_{h=0}^{H-1} h^{q+1} \leqq \frac{H^{q+2}}{q+2},$$

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q+2}} < \frac{1}{n_0^{q+2}} + \int_{n_0}^{\infty} \frac{dx}{x^{q+2}} = \frac{1}{n_0^{q+1}} \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{q+1} \right) \leqq \frac{1}{n_0^{q+1}};$$

$$(9)\quad |\Sigma' - \Sigma''| \leqq \frac{1}{(q+1)(q+2)} \cdot \frac{t}{n_0^{q+1}}.$$

Schließlich ist es bequem, in Σ'' den Faktor $\frac{1}{n}$ durch

$$l_n = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg n$$

zu ersetzen:

$$\Sigma^* = \frac{1}{H} \sum_{n=n_0}^{n_1-1} l_n \sigma_n.$$

Es gilt

$$(10)\quad |\Sigma'' - \Sigma^*| \leqq \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \left| \frac{1}{n} - l_n \right| \leqq \frac{1}{2} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wir fassen zusammen: Aus (8), (9), (10) folgt

$$(11)\quad |\Sigma_2| \leqq \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \frac{t}{n_0^{q+1}} + |\Sigma^*|,$$

(7) und (11):

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \frac{1}{[1+t^{\frac{1}{q+1}}]} + \frac{1}{n_0} + \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \frac{t}{n_0^{q+1}}$$

$$+ \left\{ \lg(Hn_0) - \frac{1}{q+1} \lg t \right\} + |\Sigma^*|.$$

der endgültigen Abschätzung werden nur die rechts in der zweiten le stehenden beiden Glieder einen wesentlichen Beitrag liefern.

Zufolge der Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\left| \sum_{n=n_0}^{n_1-1} l_n \sigma_n \right|^2 = \left| \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sqrt{l_n} \cdot \sigma_n \sqrt{l_n} \right|^2 \leqq \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n \cdot \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^2 = \lg \frac{n_1}{n_0} \cdot \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^2$$

enso

$$\left(\sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^2 \right)^2 \leqq \lg \frac{n_1}{n_0} \cdot \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^4.$$

heben wir die erste dieser Ungleichungen ins Quadrat und benutzen für n zweiten Faktor rechts die zweite Ungleichung, so kommt

$$\left| \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n \sigma_n \right|^4 \leqq \left(\lg \frac{n_1}{n_0} \right)^3 \cdot \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^4.$$

rch Fortsetzung dieses Verfahrens bekommen wir

$$\left| \sum_{n_0}^{n-1} l_n \sigma_n \right|^Q \leqq \left(\lg \frac{n_1}{n_0} \right)^{Q-1} \cdot \sum_{n_0}^{n_1-1} l_n |\sigma_n|^Q.$$

e Anwendung von Hilfssatz 2 liefert infolgedessen

$$|\Sigma^*|^Q \leqq \frac{2^{Q-q-1}}{H^{q+1}} \left(\lg \frac{n_1}{n_0} \right)^{Q-1} \cdot \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \left\{ l_n \sum_{\mathfrak{r}} (H - |\mathfrak{r}|) e^{+\frac{it(q-1)!}{(Hn)^q} r_1 r_2 \dots r_q} \right\},$$

bei das Vorzeichen $\pm$ im Exponenten $= (-1)^q$ ist. In dem zweiten durch den Multiplikationspunkt getrennten Faktoren auf der rechten te führen wir zunächst die Summation nach n aus[5]); wir schreiben se Doppelsumme also

$$\sum_{\mathfrak{r}} = \sum_{\mathfrak{r}} (H - |\mathfrak{r}|) \tau_{\mathfrak{r}},$$

$$\tau_{\mathfrak{r}} = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} l_n e^{\frac{i\xi_{\mathfrak{r}}}{n^q}} \qquad \left(\xi_{\mathfrak{r}} = \pm \frac{(q-1)!\, t}{H^q} r_1 r_2 \dots r_q \right)$$

[5]) Vgl. G. V., S. 330.

ist. Ferner trenne ich in $\sum_{\mathfrak{r}}$ die Gitterpunkte „1. Art", die dadurch charakterisiert sind, daß eine ihrer Koordinaten $r_i = 0$ ist, von den übrigen den Gitterpunkten „2. Art":

$$\sum_{\mathfrak{r}} = \sum_{\mathfrak{r}}' + \sum_{\mathfrak{r}}''.$$

In $\sum_{\mathfrak{r}}'$ ist jedes

$$\tau_{\mathfrak{r}} = \lg \frac{n_1}{n_0}.$$

Die Anzahl der Glieder dieser Summe, d. i. der Gitterpunkte 1. Art im oktaedrischen Bereich $|\mathfrak{r}| \leqq H-1$, beträgt offenbar höchstens

$$q \cdot H_{q-1} \leqq q \cdot (2H)^{q-1}.$$

Darum ist

$$\sum_{\mathfrak{r}}' (H - |\mathfrak{r}|)\, \tau_{\mathfrak{r}} \leqq H \cdot q (2H)^{q-1} \cdot \lg \frac{n_1}{n_0}. \tag{14}$$

Zwecks Abschätzung der Summe $\tau_{\mathfrak{r}}$ für einen Gitterpunkt der 2. Art vergleichen wir allgemein, für eine beliebige reelle Zahl $\xi \neq 0$,

$$\tau = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} l_n e^{\frac{\xi i}{n^q}} \quad \text{mit dem Integral} \quad \tau^* = \int_{n_0}^{n_1} e^{\frac{\xi i}{z^q}} \cdot \frac{dz}{z}.$$

Im Intervall $n \leqq z \leqq n+1$ ist

$$|e^{\frac{\xi i}{z^q}} - e^{\frac{\xi i}{n^q}}| \leqq |\xi| \left\{ \frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right\},$$

daher

$$\left| \int_n^{n+1} e^{\frac{\xi i}{z^q}} \frac{dz}{z} - l_n e^{\frac{\xi i}{n^q}} \right| \leqq \frac{|\xi|}{n} \left\{ \frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q} \right\} < |\xi| \left\{ \frac{1}{n^{q+1}} - \frac{1}{(n+1)^{q+1}} \right\},$$

$$|\tau - \tau^*| \leqq \frac{|\xi|}{n_0^{q+1}}.$$

Es ist zufolge der Substitution $\frac{|\xi|}{z^q} = y$:

$$\tau^* = \frac{1}{q} \int_{y_1}^{y_0} e^{\pm iy} \frac{dy}{y} \qquad \left(y_0 = \frac{|\xi|}{n_0^q}, \quad y_1 = \frac{|\xi|}{n_1^q} \right)$$

und da

$$\left| \int_y^{\infty} \frac{e^{\pm iy}}{y} dy \right| \leqq \frac{2}{y} \quad \text{ist} \quad (y > 0):$$

$$|\tau^*| \leqq \frac{2}{q} \left(\frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_1} \right) \leqq \frac{4}{q} \cdot \frac{1}{y_1} = \frac{4}{q} \cdot \frac{n_1^q}{|\xi|}.$$

Somit wird

$$|\tau| \leqq \frac{|\xi|}{n_0^{q+1}} + \frac{4}{q} \frac{n_1^q}{|\xi|}.$$

Für den absoluten Betrag der Größe

$$\sum_{\mathfrak{r}}''(H-|\mathfrak{r}|)\tau_{\mathfrak{r}}$$

halten wir demnach diese obere Grenze

$$H\cdot\sum_{\mathfrak{r}}''|\tau_{\mathfrak{r}}|\leqq H\cdot 2^q\left\{\frac{(q-1)!\,t}{H^q n_0^{q+1}}\sum_{\mathfrak{r}}^{+} r_1 r_2\dots r_q+\frac{4}{q!}\frac{H^q n_1^q}{t}\sum_{\mathfrak{r}}^{+}\frac{1}{r_1 r_2\dots r_q}\right\};$$

jede der beiden rechter Hand auftretenden Summen $\sum_{\mathfrak{r}}^{+}$ sich über alle Gitterpunkte $\mathfrak{r}$ *mit positiven Koordinaten* r_i erstreckt, die dem oktaedrischen Bereich $|\mathfrak{r}|\leqq H-1$ angehören. Setzen wir einen Augenblick

$$r_1=s_1,\quad r_1+r_2=s_2,\ \dots,\ r_1+r_2+\dots+r_q=s_q,$$

so gilt offenbar

$$\sum_{\mathfrak{r}}^{+} r_1 r_2\dots r_q\leqq\sum_{1\leqq s_1<s_2\dots<s_q\leqq H-1}(s_1 s_2\dots s_q)\leqq\frac{1}{q!}\sum_{1\leqq s_i\leqq H-1}(s_1 s_2\dots s_q)$$

$$=\frac{1}{q!}\Big(\sum_{s=1}^{H-1}s\Big)^q<\frac{H^{2q}}{2^q\cdot q!}.$$

Anderseits ist

$$\sum_{\mathfrak{r}}^{+}\frac{1}{r_1 r_2\dots r_q}\leqq\sum_{1\leqq r_i\leqq H-1}\frac{1}{r_1 r_2\dots r_q}=\Big(\sum_{r=1}^{H-1}\frac{1}{r}\Big)^q<(1+\lg H)^q.$$

Benutzen wir schließlich noch den Umstand, daß $(Hn_1)^q\leqq t$ ist, so finden wir

$$|\sum_{\mathfrak{r}}''|\leqq\frac{H^{q+1}\cdot t}{q\cdot n_0^{q+1}}+\frac{2^{q+2}}{q!}H(1+\lg H)^q.$$

Ferner

$$\lg\frac{n_1}{n_0}=\lg\frac{Hn_1}{Hn_0}<\lg\frac{t^{\frac{1}{q}}}{t^{\frac{1}{q+1}}}=\frac{\lg t}{q(q+1)}$$

sind wir nun imstande — durch Zusammenfassung von (13), (14) und (15) —, folgende Ungleichung für Σ^* anzugeben:

$$\Big|\frac{1}{2}\Sigma^*\Big|^Q\leqq\Big(\frac{\lg t}{q(q+1)}\Big)^Q\cdot\frac{q}{4H}+\Big(\frac{\lg t}{q(q+1)}\Big)^{Q-1}\left\{\frac{1}{q\cdot 2^{q+1}}\cdot\frac{t}{n_0^{q+1}}+\frac{2}{q!}\Big(\frac{1+\lg H}{H}\Big)^q\right\}.$$

Eine hinreichend gute Ausnutzung der aus (12) und (16) resultierenden feineren Grenze für $|\Sigma_{(q)}|$ gewinnen wir, wenn wir wählen

$$H=1+\left[\Big(\frac{\lg t}{q(q+1)}\Big)^Q\right],\qquad n_0=1+\left[t^{\frac{1}{q+1}}\Big(\frac{\lg t}{q(q+1)}\Big)^{\frac{Q}{q+1}}\right].$$

Wir setzen dabei jetzt voraus, daß

$$\lg t \geqq q(q+1) \tag{17}$$

ist. Nehmen wir den Fall $q=1$ vorweg! Dann liefert (16) im $\lim t=\infty$

$$\left|\tfrac{1}{2}\Sigma^*\right|^2 \leqq \tfrac{1}{4}+o(1), \qquad |\Sigma^*| \leqq 1+o(1)$$

und (12):

$$|\Sigma_{(1)}| \leqq o(1)+3\lg\left(\tfrac{1}{2}\lg t\right)+|\Sigma^*| \leqq 3\lg\lg t-3\lg 2+1+o(1).$$

Somit gilt für hinreichend große t, wie behauptet, die Ungleichung

$$|\Sigma_{(1)}| < 3\lg\lg t.$$

Für $q \geqq 2$ ersetzen wir [unter der Voraussetzung (17)]

$$\left(\frac{\lg t}{q(q+1)}\right)^{Q-1} \text{ durch das größere } \left(\frac{\lg t}{q(q+1)}\right)^{Q}$$

und schätzen ab

$$\left(\frac{1+\lg H}{H}\right)^q = \left(\frac{1+\lg H}{H}\right)^{q-2}\cdot\frac{(1+\lg H)^2}{H}\cdot\frac{1}{H} \leqq 1\cdot\frac{4}{e}\cdot\frac{1}{H} < \frac{3}{2H}.$$

Dann bekommen wir

$$\left|\tfrac{1}{2}\Sigma^*\right|^Q \leqq \frac{q}{4}+\frac{1}{q\cdot 2^{q+1}}+\frac{3}{q!}, \qquad |\Sigma^*|<3.$$

Was $\Sigma_{(q)}$ betrifft, so ist wegen

$$H \leqq 2\left(\frac{\lg t}{q(q+1)}\right)^Q, \qquad n_0 \leqq 2\cdot t^{\frac{1}{q+1}}\left(\frac{\lg t}{q(q+1)}\right)^{\frac{Q}{q+1}}:$$

$$\lg H n_0 \leqq 2\lg 2+\frac{q+2}{q+1}Q\{\lg\lg t-\lg q(q+1)\}+\frac{1}{q+1}\lg t;$$

daher — siehe (12) —

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{12}+2\lg 2+\frac{q+2}{q+1}Q\lg\lg t-\frac{16}{3}\lg 6+3$$
$$< \frac{q+2}{q+1}Q\lg\lg t.$$

Ist endlich

$$\lg t \leqq q(q+1),$$

so haben wir

$$|\Sigma_{(q)}| \leqq \sum_{1+\left[t^{\frac{1}{q+1}}\right]}^{\left[t^{\frac{1}{q}}\right]}\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{1+[t^{\frac{1}{q+1}}]}+\int_{t^{\frac{1}{q+1}}}^{t^{\frac{1}{q}}}\frac{dx}{x} \leqq \frac{1}{2}+\frac{\lg t}{q(q+1)} \leqq \frac{3}{2}.$$

zeichnet t_0 die durch

$$\lg\lg t_0 = \tfrac{1}{2}$$

timmte Zahl, so ist für $t > t_0$

$$\frac{3}{2} < 3\lg\lg t \leqq \frac{q+2}{q+1} Q \lg\lg t.$$

mit ist der Beweis vollendet.

(Eingegangen am 31. Mai 1920.)

Über Peanoflächen und ihren Rand.

Von

A. Rosenthal in München.

Die vorliegende kleine Bemerkung bezieht sich auf die „*Peanoflächen*", d. h. auf die ebenen Bereiche, die (wie z. B. ein Quadrat) mit Hilfe von *Peanokurven* als eindeutiges und stetiges Abbild einer Strecke dargestellt werden können. Es soll im folgenden durch ein äußerst einfaches *Beispiel* das Bestehen einer im ersten Augenblick vielleicht paradox erscheinenden Möglichkeit nachgewiesen werden, *daß nämlich Flächenstücke und zwar beschränkte, einfach-zusammenhängende Bereiche existieren, die selbst sich als stetige (Peano-) Kurve darstellen lassen, deren Rand aber nicht als stetige Kurve aufgefaßt werden kann.* Dagegen läßt sich *umgekehrt*[1] wenn der *Rand* eines beschränkten, einfach-zusammenhängenden Bereichs B sich als stetige Kurve auffassen läßt, *immer auch* der *Bereich B* selbst als stetige Kurve darstellen.

Dabei werde (wie meist üblich) unter „Gebiet" eine Menge innerer Punkte verstanden, von der irgend zwei Punkte sich durch ganz der Menge angehörende Streckenzüge verbinden lassen; mit „Bereich" werde ein Gebiet einschließlich Begrenzung bezeichnet; unter einem „beschränkten, einfach-zusammenhängenden Gebiet" werde ein beschränktes Gebiet verstanden, dessen Begrenzung aus einem einzigen Kontinuum besteht, (oder, was auf dasselbe hinausläuft: ein beschränktes Gebiet, in dem sich jedes einfache Polygon auf einen innern Punkt zusammenziehen läßt); und unter einem „beschränkten einfach-zusammenhängenden Bereich" werde ein beschränktes, einfach-zusammenhängendes Gebiet einschließlich Begrenzung verstanden.

Wir betrachten nun das folgende Beispiel eines beschränkten, einfach-zusammenhängenden Bereichs $\mathfrak{B}$ (vgl. Figur):

[1]) Wie aus den weiter unten angegebenen Bedingungen von A. Schoenflies bzw. H. Hahn unmittelbar ersichtlich ist.

Es sei zunächst $\mathfrak{H}$ ein beschränktes, einfach-zusammenhängendes Ge-
t, das von einer Jordanschen Kurve j begrenzt sei; und zwar soll j
e Strecke $(a\,b)$ enthalten. $\overline{\mathfrak{H}}$ sei
durch Vereinigung von $\mathfrak{H}$ mit j
stehende Bereich. Gegen $(a\,b)$
ie man eine Folge von ein-
hen Streckenzügen oder Kreis-
gen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_n, \ldots$ konvergieren,
alle vom Punkte a ausgehen, fer-
, abgesehen von a, ganz in $\mathfrak{H}$ ge-
en sind und außer a keinen Punkt
einsam haben. Auf jedem $\mathfrak{k}_n$ sollen,
Perlen auf einer Schnur, genau
einfach-zusammenhängende (hin-
chend schmale), von Jordanschen
rven begrenzte Gebiete

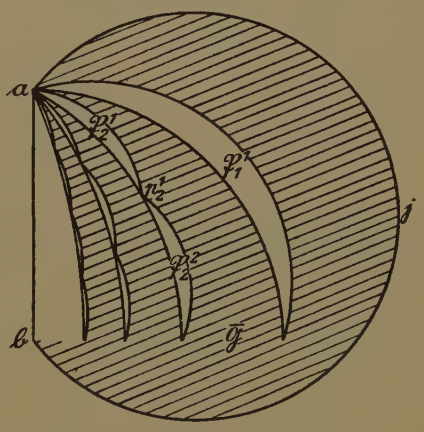

Fig. 1.

$\mathfrak{P}_n^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

en Durchmesser bei festem n konstant sei und mit wachsendem n
en 0 konvergiere, folgendermaßen aufgereiht sein: Die Begrenzung jedes
soll a enthalten, die Begrenzung jedes $\mathfrak{P}_n^n$ soll den Endpunkt von $\mathfrak{k}_n$
halten; zwei bei demselben n aufeinanderfolgende Gebiete, $\mathfrak{P}_n^\nu$ und $\mathfrak{P}_n^{\nu+1}$,
en auf ihrer Begrenzung einen gemeinsamen, auf $\mathfrak{k}_n$ liegenden Punkt p_n^ν
itzen $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$. Abgesehen hiervon sollen irgend zwei $\mathfrak{P}_n^\nu$
t ihren Begrenzungen keine gemeinsamen Punkte haben; und, von a
esehen, sollen alle $\mathfrak{P}_n^\nu$ mit ihren Begrenzungen ganz in $\mathfrak{H}$ liegen.

Man nehme nun aus $\overline{\mathfrak{H}}$ die Punkte der $\mathfrak{P}_n^\nu$ weg. Der dadurch ent-
nende beschränkte, einfach-zusammenhängende Bereich ist unser $\overline{\mathfrak{G}}$. Daß
nun wirklich ein Beispiel der gewünschten Art ist, ergibt sich un-
telbar:

Die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter
en ein beschränktes, ebenes Kontinuum K das eindeutige und stetige
ild einer Strecke sein kann (also als Träger einer stetigen Kurve sich
fassen läßt), ist bekanntlich zuerst von Herrn A. Schoenflies[2]) ge-
lt und beantwortet worden. Er fand: Es ist hierfür notwendig und
reichend, daß 1.) für jedes Komplementärgebiet von K seine Begren-
g allseitig erreichbar ist und daß außerdem 2.) Komplementärgebiete

[2]) A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltig-
en (Bericht, erstattet d. deutsch. Math.-Ver.), II. Teil, Jahresber. d. deutsch Math.-
, II. Ergänzungsband (1908), Kap. VI, insbes. S. 237.

von K, deren Durchmesser eine beliebig vorgegebene, positive Größe übe steigen, nur in endlicher Anzahl auftreten.

Diese Bedingungen sind nun für unsern Bereich $\overline{\mathfrak{G}}$ erfüllt. Dagege sind sie für den Rand R von $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht befriedigt; denn für das Kompl mentärgebiet $\mathfrak{G}$ von R, das aus $\overline{\mathfrak{G}}$ durch Weglassen des Randes R en steht, sind die (zu R gehörenden) zwischen a und b gelegenen Punkt der Strecke (ab) nicht erreichbar.

Herr H. Hahn[3]) hat eine andere (wesentlich einfachere) Form no wendiger und hinreichender Bedingungen gegeben dafür, daß ein b schränktes Kontinuum K eindeutiges und stetiges Abbild einer Streck sein kann (seine Bedingung gilt auch im n-dimensionalen Raum und noc allgemeiner); nämlich K soll „*zusammenhängend im kleinen*“[4]) sei Man sieht an unserm Beispiel auch unmittelbar, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ zusammenhänge im kleinen ist, dagegen nicht R.

---

[3]) H. Hahn, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. **23** (1914), S. 318–322; Sitzung ber. Akad. Wiss. Wien 123 IIa (1914), S. 2433–2489. [Zusatz bei der Korrek tur: Dieselbe Bedingung hat unabhängig und ungefähr gleichzeitig auch He St. Mazurkiewicz in einer polnisch geschriebenen Arbeit, C. R. Soc. Sc. Varsovi Classe III, **6** (1913), p. 305/11, aufgestellt. Erst durch eine ganz neuerdings e schienene ausführliche, in französischer Sprache abgefaßte Darstellung in den Funds menta mathematicae **1** (1920), p. 166/209 hat er seine diesbezüglichen Überlegunge allgemeiner zugänglich gemacht.]

[4]) Näheres über diesen Begriff bei H. Hahn, a. a. O.

(Eingegangen am 26. Juli 1920.)

Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode.

Von

J. G. van der Corput in Göttingen.

Die rein arithmetische Methode, welche ihrem Grundgedanken nach von Herrn Piltz 1881 herrührt, ist erst 1920 streng durchgeführt und angewendet, und zwar von Herrn Landau[1]) auf das Teilerproblem. Beim Teilerproblem wird die Anzahl der Gitterpunkte[2]) im Bereiche $\frac{1}{2} \leqq u$, $\frac{1}{2} \leqq v \leqq \frac{x}{u}$ für $x > 1$ abgeschätzt; dies ist äquivalent mit dem Problem, die Summe $\sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right)$ abzuschätzen. Während der Entstehung seiner Arbeit habe ich vielfach mit Herrn Landau über diesen Gegenstand korrespondiert. Es gelang uns bald, unabhängig und gleichzeitig, für allgemeinere Kurven $v = f(u)$ statt $v = \frac{x}{u}$, wo nur gewisse Annahmen über $f'(u)$ gemacht werden, nach der Piltzschen Methode die Abschätzungen fast so weit zu verschärfen, wie es in den anderen bis jetzt bekannten Gitterpunktabschätzungsmethoden[3]) möglich war. Dies „fast" entspricht dem Restglied $x^{\frac{1}{3}} \log^2 x$ statt $x^{\frac{1}{3}} \log x$ beim Teilerproblem, $x^{\frac{1}{4}} \log x$ statt $x^{\frac{1}{4}}$ beim Kreisproblem (beim Kreisproblem wird die Anzahl der Gitterpunkte im Kreise $u^2 + v^2 \leqq x$ für $x > 1$ abgeschätzt). Es gelang mir jedoch,

---

[1]) E. Landau, Über Dirichlets Teilerproblem [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrg. 1920, S. 13–32].

[2]) Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

[3]) Über diese Methoden kann man Näheres nachlesen in meiner Dissertation Over roosterpunten in het platte vlak (De beteekenis van de methoden van Varonoï en Pfeiffer). Noordhoff (Groningen), 1919, 128 S.

den Logarithmus aus dem Restglied wegzuschaffen, d. h. die Piltzsch Methode ebenso scharf wie die anderen bis jetzt bekannten Gitterpunk abschätzungsmethoden zu gestalten. In meiner gegenwärtigen Abhandlun führe ich die Ankündigung aus, die Herr Landau in meinem Namen i Anmerkung 6 seiner Arbeit ausgesprochen hatte, aber ich verallgemeine den damaligen Plan in zwei Richtungen: erstens wird die stetige Kurv $v = f(u)$ durch eine diskrete Punktmenge ersetzt und zweitens wird d Funktion $v - [v] - \frac{1}{2}$ ersetzt durch eine beliebige reelle Funktion $\psi(v$ welche die Periode 1 hat, absolut $\leqq 1$ ist, im Intervall $0 < v < 1$ nich abnimmt und die Eigenschaft

$$\int_0^1 \psi(v)\,dv = 0$$

besitzt.

Satz 1 bildet den Hauptsatz dieser Arbeit. In diesem Satz wir eine obere Schranke abgeleitet für $\left|\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)\right|$; hierin ist $k \geqq 2$ gan $\psi(v)$ genügt den obigen Bedingungen, f_n $(1 \leqq n \leqq k+1)$ ist ree $f_{n+1} - f_n$ $(1 \leqq n \leqq k)$ nicht negativ und mit n zunehmend. In Satz 2 wir dann eine obere Schranke gefunden für $\left|\sum_{n=1}^{k+1} \chi(f_n)\right|$, wo $\chi(v)$ reell ist, d Periode 1 hat, im Intervall $0 \leqq v \leqq 1$ von beschränkter Variation ist ur die Eigenschaft

$$\int_0^1 \chi(v)\,dv = 0$$

besitzt. In Satz 3 wird der Spezialfall mit $\psi(v) = v - [v] - \frac{1}{2}$ behande Falls man den Wert der in der Behauptung von Satz 3 vorkommend Koeffizienten außer Betracht läßt, ist dieser Satz äquivalent mit de Hauptsatz meiner Dissertation [4]) und auch mit Satz 1 einer von Her Landau und mir geschriebenen Arbeit [5]). Aus jedem der Sätze 1, 2 und folgen fast alle bis jetzt bekannten asymptotischen Gitterpunktabschätzung in ebenen Bereichen; als Beispiel wird das Teilerproblem aus Satz 1 a geleitet.

---

[4]) Über die vielfache Anwendbarkeit dieses Hauptsatzes vergleiche man mei Dissertation. Der Leser kann den Beweis dieses Satzes auch finden in der in A merkung 5 genannten Abhandlung und in meiner Arbeit: Über Gitterpunkte in d Ebene, Math. Ann., 81 (1920), S. 1–20.

[5]) E. Landau und J. G. van der Corput, Über Gitterpunkte in ebenen H reichen [Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttinge mathematisch-physikalische Klasse, Jahrg. 1920, S. 135–171].

Der grundlegende Gedanke der Piltzschen Methode ist, in $\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)$ möglichst viele Glieder

$$\psi(f_t) + \psi(f_{t+1}) + \ldots + \psi(f_{t+B-1})$$

(B ganz $\geqq 1$) zusammenzufassen, derart, daß

(1) $$\left| \sum_{h=0}^{B-1} \psi(f_{t+h}) \right|$$

klein ist. Hierzu muß man eine obere Schranke für (1) finden können, und dies geschieht folgendermaßen: Die positive, ganze, mit B teilerfremde Zahl A wird so gewählt, daß der größte Wert Δ von $|Bf_{t+h} - Bf_t - Ah|$, wo h die Zahlen $0, 1, \ldots, B-1$ durchläuft, möglichst klein ist. (1) wird nun zunächst durch die Summe

(2) $$\left| \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(f_t + \frac{A}{B} h\right) \right|$$

ersetzt. Die Piltzsche Methode beruht auf der Tatsache, daß (2), wie im Hilfssatz 1 (mit $c = Bf_t$) gezeigt wird, höchstens 2 ist. Hieraus leiten wir in Hilfssatz 2 (mit $l_h = Bf_{t+h} - Ah$) ab, daß (1) nicht größer als $4\Delta + 4$ ist. Die Summe $\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)$ wird jetzt zerlegt in eine Anzahl von Serien, von je B Gliedern (wo die Zahlen B natürlich nicht gleich zu sein brauchen), so daß $\left| \sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n) \right|$ höchstens gleich der Summe der Absolutwerte dieser Serien ist, und jede dieser Serien ist absolut $\leqq 4\Delta + 4$ (wo die Zahl Δ im allgemeinen natürlich verschieden ist). Auf diese Art findet man eine Abschätzung nach oben für $\left| \sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n) \right|$. Diese so gefundene obere Schranke wird im allgemeinen von der Zerlegung der Summe $\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)$ abhängen, und die Schwierigkeit der Piltzschen Methode besteht darin, diese Zerlegung so zu wählen, daß die obere Schranke klein genug ist. Die in dieser Arbeit angewandte Zerlegung, die von den Fareyreihen Gebrauch macht, wird der Leser im Beweis von Satz 1 finden.

Um diese Abhandlung zu verstehen, braucht der Leser die in Anmerkung 1 genannte Arbeit nicht zu kennen.

Die in den Sätzen 1 und 2 gegebenen Abschätzungen sind neu; ich werde jedoch demnächst eine neue (analytische) Methode [6]) veröffentlichen,

[6]) In den Mathematischen Annalen.

welche nicht nur diese, sondern auch allgemeinere und für besonder Funktionen $\chi(v)$ (z. B. wenn $\chi(v) = \cos 2\pi v$ oder $\chi(v) = \sin 2\pi v$ ist sogar schärfere Abschätzungen liefert.

Ich schicke dem Beweis von Satz 1 zwei Hilfssätze über die Funkt tion $\psi(v)$ voran, welche den in der Einleitung genannten Bedingunge genügt.

Hilfssatz 1. *Es sei A und B positiv, ganz und teilerfremd, c reel Dann ist*

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right)\right| \leqq 2. \tag{3}$$

Beweis. Es werde $c - [c] = \gamma$ gesetzt, so daß $0 \leqq \gamma < 1$ ist. D $[c] + Ah$ mit h ein vollständiges Restsystem mod B durchläuft, folgt au den Voraussetzungen über die Funktion $\psi(v)$

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right) &= \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{\gamma+h}{B}\right) \geqq \psi\left(\frac{\gamma}{B}\right) + \int_0^{B-1} \psi\left(\frac{u}{B}\right) du \\ &= \psi\left(\frac{\gamma}{B}\right) - \int_{B-1}^{B} \psi\left(\frac{u}{B}\right) du \geqq -1-1 = -2.\end{aligned} \tag{4}$$

Ich setze $\gamma' = \gamma$, falls $0 < \gamma < 1$ ist, und $\gamma' = 1$, falls $\gamma = 0$ ist. Dann i

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right) &= \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{\gamma'+h}{B}\right) \leqq \psi\left(\frac{\gamma'+B-1}{B}\right) + \int_1^{B} \psi\left(\frac{u}{B}\right) du \\ &= \psi\left(\frac{\gamma'+B-1}{B}\right) - \int_0^{1} \psi\left(\frac{u}{B}\right) du \leqq 1+1 = 2.\end{aligned} \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt (3).

Hilfssatz 2. *Es sei $\Delta \geqq 0$, A und B positiv, ganz und teile fremd, $l_0, l_1, \ldots, l_{B-1}$ reell und $|l_h - l_0| \leqq \Delta$ $(1 \leqq h \leqq B-1)$. Dann*

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{l_h+Ah}{B}\right)\right| \leqq 4\Delta + 4.$$

Beweis. Es werde $m = l_0 - \Delta$, $M = l_0 + \Delta$ gesetzt, so daß $m \leqq l_h \leqq$ ist; c bedeute die Zahl m bzw.[7]) M. Wenn $\psi\left(\frac{l_h+Ah}{B}\right) - \psi\left(\frac{c+A}{B}\right)$ negativ, bzw. positiv ist, enthält das Intervall $\frac{l_h+Ah}{B}$ (inkl.) bis $\frac{c+Ah}{B}$ (inkl

[7]) Wo in dem folgenden Beweis das Wort bzw. vorkommt, entsprechen d beiden Möglichkeiten denen der beiden Werte von c.

also auch das Intervall $\frac{m+Ah}{B} \leqq u \leqq \frac{M+Ah}{B}$ mindestens eine ganze Zahl. Das Intervall $m \leqq u \leqq M$ enthält dann mindestens eine Zahl $\equiv -Ah \pmod B$; da dies Intervall höchstens $M-m+1 = 2\Delta+1$ ganze Zahlen enthält, gibt es höchstens $2\Delta+1$ solche h auf der Summationsstrecke $0 \leqq h \leqq B-1$. In der Summe

$$\sum_{h=0}^{B-1}\left(\psi\left(\frac{l_h+Ah}{B}\right)-\psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right)\right)$$

kommen also höchstens $2\Delta+1$ negative, bzw. positive Glieder vor, und jedes Glied ist absolut höchstens 2, so daß die Summe $\geqq -4\Delta-2$, bzw. $\leqq 4\Delta+2$ ist. Hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Hilfssatz, daß

$$\sum_{h=0}^{B-1}\psi\left(\frac{l_h+Ah}{B}\right)=\sum_{h=0}^{B-1}\left(\psi\left(\frac{l_h+Ah}{B}\right)-\psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right)\right)+\sum_{h=0}^{B-1}\psi\left(\frac{c+Ah}{B}\right)$$
$$\geqq -4\Delta-2-2=-4\Delta-4, \text{ bzw. } \leqq 4\Delta+2+2=4\Delta+4$$

ist, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 1. *Es sei $k \geqq 2$ ganz; es seien $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ reell; es werde $f_{n+1}-f_n = g_n$ $(1 \leqq n \leqq k)$ gesetzt und es sei $g_n \geqq 0$ und mit wachsendem n beständig zunehmend. Es sei die Zahl $z > 1$ so gewählt, daß*

$$z^3 > \frac{1}{g_{n+1}-g_n} \qquad (1 \leqq n \leqq k-1) \tag{6}$$

ist. Es genüge $\psi(v)$ den in der Einleitung genannten Bedingungen. Dann ist

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\psi(f_n)\right| < 453\,z^2, \quad \textit{falls } g_1 < \frac{1}{z-1} \textit{ und } g_k < 1 \textit{ ist,} \tag{7}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\psi(f_n)\right| < 711\,z^3 g_k \quad \textit{in allen anderen Fällen}^{8}). \tag{8}$$

Bemerkung. Trivial wäre

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\psi(f_n)\right| < 3z^3 g_k;$$

denn die linke Seite ist $\leqq k+1 < 3z^3 g_k$ wegen

$$g_k \geqq g_k - g_1 = \sum_{n=1}^{k-1}(g_{n+1}-g_n) > \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{z^3} = \frac{k-1}{z^3} \geqq \frac{k+1}{3z^3}. \tag{9}$$

[8]) Es würde leicht sein, die konstanten Faktoren in der Behauptung zu verkleinern; doch habe ich darauf keinen Wert gelegt, da es mir nur auf die Größenordnung der Funktion von z ankommt.

Beginn des Beweises. Um (7) und (8) zu beweisen, genügt unter der weiteren Voraussetzung $g_k < 1$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)\right| < 237\, z^2, \tag{10}$$

unter der weiteren Voraussetzung $g_k < 1$ und $g_1 \geqq \frac{1}{z-1}$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)\right| < 453\, z^2 g_k \tag{11}$$

abzuleiten. Daß dies genügt, ist unmittelbar klar, wenn $g_k < 1$ ist; falls $g_k \geqq 1$ ist, zerlegen wir $\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)$ in höchstens $[g_k] + 2 \leqq 3 g_k$ Summen

$$\sum\nolimits_h = \sum\nolimits_h \psi(f_n) = \sum\nolimits_h \psi(f_n - hn),$$

ausgedehnt über diejenigen ganzen n, wofür $h \leqq g_n < h+1$ (h ganz $\geqq 1$ und $\leqq g_k$) ist. Falls die Summe $\sum_h$ zwei oder weniger Glieder enthält, ist $\left|\sum_h\right| \leqq 2 < 237\, z^2$; falls $\sum_h$ mehr als zwei Glieder besitzt, genügt $\sum_h$ den Voraussetzungen des Satzes mit $f_n - hn$ statt f_n, und dabei ist

$$0 \leqq \{f_{n+1} - h(n+1)\} - \{f_n - hn\} = g_n - h < 1,$$

so daß Formel (10) auf die Summe $\sum_h$ anwendbar ist. Wir finden dann

$$\left|\sum\nolimits_h\right| < 237\, z^2,$$

und hieraus folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)\right| < 3\, g_k \cdot 237\, z^2 = 711\, z^2 g_k.$$

Unter der zu z gehörigen Fareyreihe verstehen wir die wachsend geordneten reduzierten Brüche $\frac{\alpha}{\beta}$ mit $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq [z]$ (es handelt sich also um $\frac{0}{1}$, die echten reduzierten Brüche mit Nenner $\leqq z$ und $\frac{1}{1}$). Für zwei Nachbarbrüche $\frac{\alpha}{\beta} \gtrless \frac{\alpha'}{\beta'}$ der zu z gehörigen Fareyreihe ist bekanntlich[9]) $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$. Zwischen die Nachbarbrüche $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha'}{\beta'}$ lege ich zuerst die „Mediante“ $\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$. Es sei μ die durch die Ungleichungen

$$\frac{z^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{4}{3}}} - \frac{\beta'}{\beta} + 1 \geqq \mu > \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{4}{3}}} - \frac{\beta'}{\beta}$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl. Dann ist

[9]) Vgl. z. B. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, erster Teil (1902), S. 121–15 Teubner (Leipzig).

(12) $$\beta' + \mu\beta > \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}} \geqq \beta' + (\mu - 1)\beta,$$

und wegen $z^{\frac{1}{3}} \geqq \beta' \beta^{\frac{1}{3}}$ ist $\mu \geqq 1$. Zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ lege ich die zu- oder abnehmend geordneten Medianten

$$\frac{\alpha'+\mu\alpha}{\beta'+\mu\beta}, \quad \frac{\alpha'+(\mu-1)\alpha}{\beta'+(\mu-1)\beta}, \cdots \frac{\alpha'+2\alpha}{\beta'+2\beta};$$

im Falle $\mu = 1$ ist also zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ kein Bruch interpoliert. Wenn man die Brüche $\frac{\alpha}{\beta}$ der zu z gehörigen Fareyreihe und die Medianten wachsend ordnet und mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet, erfüllt jedes Paar von Nachbarbrüchen $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a'}{b'}$ dieser Reihe die Beziehung $ab' - a'b = \pm 1$. Denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachte ich die Strecke $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$; die Nachbarbrüche sind dann entweder

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha'+\mu\alpha}{\beta'+\mu\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha'+(q+1)\alpha}{\beta'+(q+1)\beta}, \quad \frac{\alpha'+q\alpha}{\beta'+q\beta} \quad (1 \leqq q \leqq \mu - 1),$$

und es ist

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha'+\mu\alpha \\ \beta & \beta'+\mu\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha'+(q+1)\alpha & \alpha'+q\alpha \\ \beta'+(q+1)\beta & \beta'+q\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha'+q\alpha \\ \beta & \beta'+q\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Die Strecke $0 \leqq v < 1$ ist einerseits durch die Brüche $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ und andererseits durch die Brüche $\frac{a}{b}$ (also auf zwei Arten) in Intervalle eingeteilt; den Punkt, in dem zwei Intervalle aneinander grenzen, zähle ich stets zum rechten. Jedes v der Strecke $0 \leqq v < 1$ gehört so einem bestimmten Intervall $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ [10]) und auch einem bestimmten Intervall $\frac{\ }{\ } \ldots \frac{a'}{b'}$ [10]) an; da die Nenner der Nachbarbrüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ verschieden sind[11]), kann ich immer $b < b'$ voraussetzen. Jedem positiven ganzen

[10]) Diese Bezeichnung besagt natürlich nicht, daß die zuerst geschriebene Zahl die kleinere sein muß.

[11]) Denn aus $ab' - a'b = \pm 1$, $b = b'$ folgt entweder $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}, \frac{a'}{b'} = \frac{1}{1}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{0}{1}$ und die Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ sind nicht zwei Nachbarbrüche in der von den Brüchen $\frac{\alpha}{\beta}$ und den Medianten gebildeten Reihe, da diese Reihe jedenfalls den Bruch $\frac{1}{1}$ enthält.

$t \leqq k$ entsprechen so, wenn die zu $v = g_t$ nach dem obigen gehörige Intervalle aufgesucht werden, bestimmte β_t, α_t, β_t', α_t', b_t, a_t, b_t' und a_t'. Ich führe ferner noch die Zahl B_t $(1 \leqq t \leqq k)$ folgendermaßen ein: Wenn $t + b_t - 1 \leqq k$ ist und außerdem g_{t+b_t-1} im Intervall $\frac{\alpha_t}{\beta_t} \ldots \frac{\alpha_t + \alpha_t'}{\beta_t + \beta_t'}$ liegt, sei $B_t = b_t$; sonst sei $B_t = \beta_t$.

Hilfssatz 3. *Bei der genannten Bedeutung von B_t ist, falls $t + B_t - 1 \leqq k$ ist,*

$$\left| \sum_{n=t}^{t+B_t-1} \psi(f_n) \right| \leqq 4 B_t^2 (g_{t+B_t-1} - g_t) + 8.$$

Beweis. Ich setze $A_t = \alpha_t$ oder a_t, je nachdem $B_t = \beta_t$ oder b_t ist. Im Beweis dieses Hilfssatzes lasse ich den Index t bei den Zahlen A, α, a, B, β und b weg.

Wegen $b' > b$ ist

$$\left| g_t - \frac{a}{b} \right| \leqq \left| \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{b\,b'} < \frac{1}{b^2},$$

und es ist

$$\left| g_t - \frac{\alpha}{\beta} \right| \leqq \left| \frac{\alpha' + \alpha}{\beta' + \beta} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{1}{\beta(\beta' + \beta)} < \frac{1}{\beta^2},$$

also

$$\left| g_t - \frac{A}{B} \right| < \frac{1}{B^2}. \tag{13}$$

Wenn $l_h = B f_{t+h} - A h$ $(0 \leqq h \leqq B-1)$ gesetzt wird, ist für $1 \leqq h \leqq B -$

$$|l_h - l_0| = B(f_{t+h} - f_t) - A h = B \sum_{n=0}^{h-1} (f_{t+n+1} - f_{t+n}) - A h$$

$$= B \sum_{n=0}^{h-1} \left(g_{t+n} - \frac{A}{B} \right) = B \sum_{n=0}^{h-1} (g_{t+n} - g_t) + B \sum_{n=0}^{h-1} \left(g_t - \frac{A}{B} \right),$$

also wegen (13)

$$|l_h - l_0| < B \sum_{n=0}^{B-1} (g_{t+B-1} - g_t) + B \sum_{n=0}^{B-1} \frac{1}{B^2} = B^2 (g_{t+B-1} - g_t) + 1.$$

Wegen $f_{t+h} = \frac{l_h + A h}{B}$ ist nach Hilfssatz 2 mit $\Delta = B^2 (g_{t+B-1} - g_t) +$

$$\left| \sum_{n=t}^{t+B-1} \psi(f_n) \right| = \left| \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{l_h + A h}{B} \right) \right| \leqq 4\Delta + 4$$

$$= 4 B^2 (g_{t+B-1} - g_t) + 8.$$

Schluß des Beweises. Für $1 \leqq t \leqq k$ sind $\frac{a_t}{b_t}$ und $\frac{a_t'}{b_t'}$ zwei Nachbrüche der Reihe

$$\frac{\alpha_t}{\beta_t}, \quad \frac{\alpha_t' + \mu_t \alpha_t}{\beta_t' + \mu_t \beta_t}, \quad \frac{\alpha_t' + (\mu_t - 1)\alpha_t}{\beta_t' + (\mu_t - 1)\beta_t}, \ldots, \frac{\alpha_t' + \alpha_t}{\beta_t' + \beta_t}.$$

Wegen $b_t < b_t'$ und (12) ist

$$\beta_t \leqq b_t \leqq \beta_t' + (\mu_t - 1)\beta_t \leqq \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\beta_t^{\frac{1}{3}}},$$

und da B_t entweder b_t oder β_t ist, ist

$$B_t \leqq b_t \leqq \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\beta_t^{\frac{1}{3}}}. \tag{14}$$

Ich führe jetzt die wachsenden Zahlen

$$t_0 = 1, \quad t_1 = t_0 + B_{t_0}, \quad t_2 = t_1 + B_{t_1}, \ldots, t_s = t_{s-1} + B_{t_{s-1}}$$

an, wo entweder $t_s = k + 1$ oder $t_s < k + 1 < t_s + B_{t_s}$ ist; hierdurch ist die ganze Zahl s eindeutig bestimmt. Dann ist $k + 2 - t_s \leqq z$; dies ist klar, wenn $t_s = k + 1$ ist, und im Falle $t_s < k + 1 < t_s + B_{t_s}$ ist $B_{t_s} = \beta_{t_s}$ (denn sonst würde nach der Definition von B_t die Zahl $t_s + b_{t_s} - 1$, also gewiß $t_s + B_{t_s} - 1 \leqq k$ sein), also $k + 2 - t_s \leqq B_{t_s} = \beta_{t_s} \leqq z$. Aus

$$\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n) = \sum_{\sigma=0}^{s-1} S_\sigma + \sum_{n=t_s}^{k+1} \psi(f_n),$$

also

$$S_\sigma = \sum_{n=t_\sigma}^{t_{\sigma+1}-1} \psi(f_n)$$

gesetzt ist, folgt wegen $|\psi(f_n)| \leqq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n)\right| \leqq \sum_{\sigma=0}^{s-1} |S_\sigma| + (k + 2 - t_s) \leqq \sum_{\sigma=0}^{s-1} |S_\sigma| + z. \tag{15}$$

Nach Hilfssatz 3 ist

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=0}^{s-1} |S_\sigma| &\leqq 4 \sum_{\sigma=0}^{s-1} B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) + 8 \sum_{\sigma=0}^{s-1} 1 \\ &= 4 \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) + 4 \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) \\ &\quad + 8 \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}' 1 + 8 \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'' 1, \end{aligned} \tag{16}$$

wo die Summen $\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'$ erstreckt werden über diejenigen Werte von

σ $(0 \leqq \sigma \leqq s-1)$, für welche $B_{t_\sigma} \leqq z$ ist, und die Summen $\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}''$ über di
jenigen Werte von σ $(0 \leqq \sigma \leqq s-1)$, für welche $B_{t_\sigma} > z$ ist. Es ist hier

$$(17) \qquad \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) \leqq z^2 \sum_{\sigma=0}^{s-1} (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) = z^2 (g_{t_s-1} - g_{t_0})$$

und wegen (9) ist

$$(18) \qquad \sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'' 1 \leqq \frac{1}{z} \sum_{\sigma=0}^{s-1} B_{t_\sigma} = \frac{1}{z} \sum_{\sigma=0}^{s-1} (t_{\sigma+1} - t_\sigma) = \frac{1}{z}(t_s - t_0) \leqq \frac{k}{z} < 2z^2 g_k$$

Um die beiden anderen im letzten Gliede von (16) vorkommend
Summen zu berechnen, betrachte ich die Summen

$$S' = \sum_\sigma{}' 1 \quad \text{und} \quad S'' = \sum_\sigma{}'' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}),$$

erstreckt über alle Werte von σ $(0 \leqq \sigma \leqq s-1)$, für welche g_{t_σ} in eine
bestimmten Intervall $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ liegt, und $B_{t_\sigma} \leqq z$, bzw. $B_{t_\sigma} > z$ ist.
S'' ist $B_{t_\sigma} \neq \beta$, wegen $B_{t_\sigma} > z$ und $\beta \leqq z$; folglich ist $B_{t_\sigma} = b_{t_\sigma}$, al
$t_\sigma + b_{t_\sigma} - 1 = t_{\sigma+1} - 1 \leqq k$. Nach der Definition von B_{t_σ} liegt $g_{t_{\sigma+1}}$
dann im Intervall $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$, und da die Nenner der Medianten $> z$ sin
ist $\beta + \beta' > z$. Aus (14) folgt also

$$(19) \qquad S'' \leqq \left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \sum_\sigma{}'' (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma})$$

$$\leqq \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\beta(\beta+\beta')} < \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}}}.$$

In den Gliedern von S' ist $B_{t_\sigma} \leqq z$, also $B_{t_\sigma} = \beta$, da die Nenn
der Medianten $> z$ sind; es ist also

$$(20) \qquad t_{\sigma+1} - t_\sigma = B_{t_\sigma} = \beta.$$

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $b_{t_\sigma} = \beta$ ist oder nich

1. Es sei $b_{t_\sigma} = \beta$. Dann liegt g_t im Intervall $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'+\mu\alpha}{\beta'+\mu\beta}$. Nac
(12) hat dies Intervall die Länge

$$\lambda = \frac{1}{\beta(\beta'+\mu\beta)} < \frac{1}{\beta \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}.$$

Wegen (6) und (20) ist

$$g_{t_{\sigma+1}} - g_{t_\sigma} = \sum_{n=t_\sigma}^{t_{\sigma+1}-1} (g_{n+1} - g_n) > \sum_{n=t_\sigma}^{t_{\sigma+1}-1} \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{t_{\sigma+1} - t_\sigma}{z^3} = \frac{\beta}{z^3},$$

so daß es höchstens

$$1 + \frac{\lambda}{\frac{\beta}{z^3}} < 1 + \frac{z^3}{\beta \cdot \beta^{\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{3}}} \leqq \frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} + \frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} = 2\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} \tag{21}$$

solche σ gibt.

2. Es sei $b_{t_\sigma} \neq \beta$. Dann ist nach (20) $B_{t_\sigma} \neq b_{t_\sigma}$, so daß nach der Definition von B_t, im Falle $t_\sigma + b_{t_\sigma} - 1 \leqq k$, die Zahl $g_{t_\sigma + b_{t_\sigma} - 1}$ nicht im Intervall $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ liegt. Es bezeichne ϱ die kleinste, ν die größte der Zahlen σ, so daß $t_\varrho \leqq t_\nu \leqq k$ ist. Dann ist

$$t_\nu < t_\varrho + b_{t_\varrho}. \tag{22}$$

Dies ist klar, wenn $t_\varrho + b_{t_\varrho} - 1 > k$ ist, und im Falle $t_\varrho + b_{t_\varrho} - 1 \leqq k$ liegen zwar g_{t_ϱ} und $g_{t_\nu} \geqq g_{t_\varrho}$ im Intervall $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$, aber $g_{t_\varrho + b_{t_\varrho} - 1} \geqq g_{t_\varrho}$ nicht, und hieraus folgt, daß $g_{t_\varrho + b_{t_\varrho} - 1} > g_{t_\nu}$, also $t_\varrho + b_{t_\varrho} - 1 > t_\nu$ ist. Aus (22) und (14) folgt $t_\nu - t_\varrho < b_{t_\varrho} \leqq \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}}$, und hieraus ergibt sich, mit Rücksicht auf (20),

$$\frac{z^{\frac{4}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}} > t_\nu - t_\varrho = \sum_{\sigma=\varrho}^{\nu-1} (t_{\sigma+1} - t_\sigma) = \beta(\nu - \varrho) \tag{12};$$

die Anzahl der zu diesem Falle gehörigen σ ist höchstens $1 + \nu - \varrho$, also kleiner als

$$1 + \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}} \cdot \beta} \leqq \frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} + \frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} = 2\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}}. \tag{23}$$

Aus (21) und (23) folgt $S' < 4\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}}$, und hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (19)

$$4S'' + 8S' < (4 + 8 \cdot 4)\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}} = 36\frac{z^{\frac{5}{3}}}{\beta^{\frac{5}{3}}}. \tag{24}$$

---

12) $\sum_{\sigma=\varrho}^{\varrho-1} = 0.$

Zu jedem $\beta \leqq [z]$ gibt es höchstens $2\varphi(\beta) \leqq 2\beta$ (wo $\varphi(\beta)$ die Eulersche Funktion ist) Intervalle $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$, so daß aus (24) folgt

$$(25) \qquad 4\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) + 8\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}' 1 < 36 z^{\frac{5}{6}} \sum_{\beta=1}^{[z]} \frac{2\beta}{\beta^{\frac{5}{3}}}$$

$$= 72 z^{\frac{5}{6}} \sum_{\beta=1}^{[z]} \frac{1}{\beta^{\frac{2}{3}}} < 72 z^{\frac{5}{6}} \cdot 3 z^{\frac{1}{3}} = 216 z^2.$$

Wegen $g_k < 1$ und $z > 1$ geht aus (15), (16), (17), (18) und (25) hervor

$$\Big| \sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n) \Big| < (4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 216 + 1) z^2 = 237 z^2,$$

womit (10) bewiesen ist. Um (11) zu beweisen, setzen wir $g_1 \geqq \frac{1}{z-\ldots}$ voraus. Dann gibt es einen positiven Bruch $\frac{\alpha}{\beta} < g_1$, nämlich $\frac{1}{z-\theta}$, wo $0 \leqq \theta < 1$ ist, so daß der Bruch $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{0}{1}$ jetzt außer Betracht gelassen werden kann, und wenn $\frac{\alpha''}{\beta''}$ den größten, $\frac{\alpha'''}{\beta'''}$ den nächstgrößten der Brüche $\frac{\alpha}{\beta}$ bezeichnet, so ist

$$\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{\alpha'''}{\beta'''} + \frac{1}{\beta''\beta'''} \leqq \frac{2\alpha'''}{\beta'''} \leqq 2 g_k.$$

Es ist also $1 \leqq \alpha \leqq 2\beta g_k$, und hieraus ergibt sich, daß in diesem Falle zu jedem $\beta \leqq [z]$ höchstens $4\beta g_k$ Intervalle $\frac{\alpha}{\beta} \ldots \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}$ gehören. Statt (25) finden wir also jetzt

$$(26) \qquad 4\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}' B_{t_\sigma}^2 (g_{t_{\sigma+1}-1} - g_{t_\sigma}) + 8\sum_{\sigma=0}^{s-1}{}'' 1 < 432 z^2 g_k,$$

und wegen $z < \frac{z^2}{z-1} \leqq z^2 g_1 < z^2 g_k$ folgt nun aus (15), (16), (17), (18) und (26)

$$\Big| \sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n) \Big| < (4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 432 + 1) z^2 g_k = 453 z^2 g_k,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Satz 2. *Falls die reelle Funktion* $\chi(v)$ *die Periode* 1, *im Intervall* $0 \leqq v \leqq 1$ *eine totale Variation* $\leqq T$ *hat*[13]),

$$(27) \qquad \int_0^1 \chi(v)\, dv = 0$$

[13]) Vergleich z. B. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen 1918, Teubner (Leipzig und Berlin), S. 181.

st und $k, f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$ *den Voraussetzungen von Satz* 1 *genügen, so ist*

28) $$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\psi(f_n)\right| < 906\,z^2T, \quad \textit{falls } g_1 < \frac{1}{z-1} \textit{ und } g_k < 1 \textit{ ist,}$$

29) $$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\psi(f_n)\right| < 1422\,z^2 g_k T \quad \textit{in allen anderen Fällen.}$$

Beweis. Für $0 \leqq v \leqq 1$ bezeichne $P(v)$ die positive, $N(v)$ die egative, also $P(v)+N(v)$ die totale Variation[14]) von $\chi(v)$ im abeschlossenen Intervall $(0, v)$, und es werde

30) $$T\psi_1(v) = P(v) - \int_0^1 P(v)\,dv,$$

31) $$T\psi_2(v) = N(v) - \int_0^1 N(v)\,dv$$

esetzt. Dann ist

$$\int_0^1 \psi_1(v)\,dv = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \psi_2(v)\,dv = 0.$$

Vegen (27), $\chi(v) = P(v) - N(v)$ [15]), (30) und (31) ist

32) $$\chi(v) = \chi(v) - \int_0^1 \chi(v)\,dv = P(v) - N(v) - \int_0^1 P(v)\,dv + \int_0^1 N(v)\,dv$$
$$= T(\psi_1(v) - \psi_2(v)).$$

Im Intervall $0 < v < 1$ nehmen die Funktionen $\psi_1(v)$ und $\psi_2(v)$ icht ab, und ferner ist $|\psi_1(v)| \leqq 1$ und $|\psi_2(v)| \leqq 1$; denn es ist $P(v) \geqq 0$, $N(v) \geqq 0$, $P(v)+N(v) \leqq T$, also $0 \leqq P(v) \leqq T$ und $\leqq N(v) \leqq T$, und hieraus folgt wegen (30)

$$-T = 0 - \int_0^1 T\,dv \leqq T\psi_1(v) \leqq T - \int_0^1 0\,dv = T,$$

egen (31)

$$-T = 0 - \int_0^1 T\,dv \leqq T\psi_2(v) \leqq T - \int_0^1 0\,dv = T.$$

Die Voraussetzungen von Satz 1 mit $\psi_1(v)$ bzw. $\psi_2(v)$ statt $\psi(v)$ ind also erfüllt, und aus (7) bzw. (8) ergibt sich wegen (32) Formel (28) zw. (29).

Satz 3. *Es sei* $w - \frac{1}{2} > 0$ *und ganz; für* $\frac{1}{2} \leqq u \leqq w$ *sei* $f(u)$ *efiniert und differentiierbar*[16]), $f(u) > \frac{1}{2}$, $0 < f'(u)$, $f'(u)$ *beständig achsend. Der Differenzenquotient*

[14]) C. Carathéodory, l. c., S. 183.
[15]) C. Carathéodory, l. c., S. 184.
[16]) In den Endpunkten eventuell nur einseitig.

$$\frac{u_2-u_1}{f'(u_2)-f'(u_1)} \qquad \left(\tfrac{1}{2} \leqq u_1 < u_2 \leqq w\right.$$

sei beschränkt, so daß es gewiß eine von u_1, u_2 freie Zahl $z>1$ derart gibt, daß dieser Differenzenquotient

$$\frac{u_2-u_1}{f'(u_2)-f'(u_1)} < z^3 \tag{33}$$

ist. G bedeute das Gebiet $\frac{1}{2} \leqq u \leqq w$, $\frac{1}{2} \leqq v \leqq f(u)$; $B(G)$ die Anzahl der Gitterpunkte und $J(G)$ den Flächeninhalt $\int_{\frac{1}{2}}^{w} (f(u)-\frac{1}{2})\,du$ dieses Gebietes. Dann ist

$$|B(G)-J(G)| < 352\,z^2, \quad \textit{falls } f'(\tfrac{1}{2}) < \frac{1}{z-1} \textit{ und } f'(w)<1 \textit{ ist} \tag{34}$$

$$|B(G)-J(G)| < 352\,z^2 f'(w) \quad \textit{in allen anderen Fällen.} \tag{35}$$

Beweis. Es werde $k=w-\frac{3}{2}$, $f_n=f(n)$ (n ganz; $1 \leqq n \leqq k+1$) und $\psi(v)=2(v-[v]-\frac{1}{2})$ gesetzt. Falls $w \geqq \frac{7}{2}$ ist, sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt; denn dann ist für $1 \leqq n \leqq k-1$ wegen (33)

$$\begin{aligned} g_{n+1}-g_n &= (f(n+2)-f(n+1))-(f(n+1)-f(n)) \\ &= \int_n^{n+1} (f'(u+1)-f'(u))\,du > \int_n^{n+1} \frac{du}{z^3} = \frac{1}{z^3}. \end{aligned}$$

Wir können also dann (7) bzw. (8) anwenden, und hierin ist

$$g_k = f(w-\tfrac{1}{2})-f(w-\tfrac{3}{2}) = f'(\xi) < f'(w) \qquad (w-\tfrac{3}{2} < \xi < w-\tfrac{1}{2})$$

Wenn $f'(w)<1$ ist, folgt aus (7), bzw. (8) wegen $z^3 g_k < z^2$,

$$\Big|\sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} (f(n)-\tfrac{1}{2}) - \sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} [f(n)]\Big| < \frac{711}{2} z^2, \tag{36}$$

und wenn $f'(w) \geqq 1$ ist, folgt aus (7), bzw. (8) wegen $z^3 \leqq z^2 f'(w)$ und $z^3 g_k < z^2 f'(w)$,

$$\Big|\sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} (f(n)-\tfrac{1}{2}) - \sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} [f(n)]\Big| < \frac{711}{2} z^2 f'(w); \tag{37}$$

(37) ist auch im Falle $f'(w)<1$, $f'(\frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{z-1}$ gültig; denn dann ist (8) anwendbar wegen

$$g_1 = f(2)-f(1) = f'(\xi) > f'(\tfrac{1}{2}) \qquad (1<\xi<2)$$

---

[17]) Diese Ungleichung ist insbesondere erfüllt, wenn $f''(u)$ vorhanden und $> \frac{1}{z}$ ist; denn dann ist

$$f'(u_2)-f'(u_1) = (u_2-u_1) f''(\xi) > \frac{u_2-u_1}{z^3} \qquad (u_1<\xi<u_2)$$

Die Ungleichungen (36) und (37) gelten auch, wenn $w \leqq \frac{5}{2}$ ist. Denn wegen $|f(n)-\frac{1}{2}-[f(n)]| \leqq \frac{1}{2}$ ist dann jede der linken Seiten $\leqq \frac{1}{2}(w-\frac{1}{2}) \leqq 1$; ferner ist $z^2 > 1$; falls $f'(w) \geqq 1$ ist, ist $z^2 f'(w) > 1$, und falls $f'(\frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{z-1}$ ist, ist $z^2 f'(w) \geqq z^2 f'(\frac{1}{2}) > 1$.

Für $1 \leqq n \leqq w - \frac{1}{2}$, $n - \frac{1}{2} \leqq u \leqq n + \frac{1}{2}$ folgt aus dem zweiten Mittelwertsatz

$$|f(n) - f(u) - (n-u) f'(n)| = |(n-u)(f'(\xi) - f'(n))|$$
$$< \tfrac{1}{2}(f'(n+\tfrac{1}{2}) - f'(n-\tfrac{1}{2})) \qquad (n \leqq \xi \leqq u, \text{ bzw. } u \leqq \xi \leqq n),$$

und hieraus ergibt sich, daß

$$f(n) - \tfrac{1}{2} - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (f(u) - \tfrac{1}{2})\,du = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (f(n) - f(u) - (n-u) f'(n))\,du$$

absolut kleiner ist als $\frac{1}{2}(f'(n+\frac{1}{2}) - f'(n-\frac{1}{2}))$, also

$$\Big|\sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} (f(n) - \tfrac{1}{2}) - J(G)\Big| < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} (f'(n+\tfrac{1}{2}) - f'(n-\tfrac{1}{2}))$$
$$= \tfrac{1}{2}(f'(w) - f'(\tfrac{1}{2})) < \tfrac{1}{2} z^2 f'(w). \tag{38}$$

Aus (36), (37) und (38) folgen (34) und (35) wegen $B(G) = \sum_{n=1}^{w-\frac{1}{2}} [f(n)]$.

Teilerproblem. Als Anwendung von Satz 1 beweise ich schließlich, daß für jede Funktion $\psi(v)$, welche den Voraussetzungen von Satz 1 genügt, gleichmäßig in x

$$\sum_{m=1}^{[\sqrt{x}]} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = O(\sqrt[3]{x} \log x)$$

ist; hieraus folgt bekanntlich [18]) unmittelbar das schärfste bis jetzt gefundene Ergebnis beim Teilerproblem, falls $\psi(v) = v - [v] - \frac{1}{2}$ gesetzt wird.

Es bezeichne h eine positive ganze Zahl $\leqq [\sqrt[3]{x}]$, P_h die Summe $\sum \psi\left(\frac{x}{m}\right)$, ausgedehnt über diejenigen ganzen m, für die $\sqrt[3]{x} < m \leqq \sqrt{x}$ und $h \leqq \frac{x}{m^2} < h+1$ ist; falls es kein solches m gibt, werde $P_h = 0$ gesetzt.

Dann ist $\sum_{h=1}^{[\sqrt[3]{x}]} P_h = \sum \psi\left(\frac{x}{m}\right)$, ausgedehnt über diejenigen m, für die

$$\sqrt[3]{x} < m \leqq \sqrt{x} \tag{39}$$

und

$$1 \leqq \frac{x}{m^2} < [\sqrt[3]{x}] + 1 \tag{40}$$

[18]) Vgl. z. B. die in Fußnote [1]) erwähnte Arbeit, S. 16.

ist; da (40) aus (39) folgt, ist wegen $|\psi(v)| \leqq 1$, falls $[\sqrt[3]{x}]+1 \leqq [\sqrt{x}]$ ist

$$(41) \qquad \sum_{m=1}^{[\sqrt{x}]} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{m=[\sqrt[3]{x}]+1}^{[\sqrt{x}]} \psi\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{m=1}^{[\sqrt[3]{x}]} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{h=1}^{[\sqrt[3]{x}]} P_h + O(\sqrt[3]{x}).$$

Die Ungleichung

$$(42) \qquad |P_h| < 711 \frac{\sqrt[3]{2x}}{h},$$

welche evident ist, falls P_h weniger als drei Glieder enthält, folgt unmittelbar aus Satz 1 mit $z = \frac{\sqrt[6]{2x}}{\sqrt{h}}$, falls P_h drei oder mehr Glieder besitzt. Denn wegen der Periodizität von $\psi(v)$ ist

$$P_h = \sum_{n=1}^{k+1} \psi\left(\frac{x}{m_0+n}\right) = \sum_{n=1}^{k+1} \psi\left(\frac{x}{m_0+n} + (h+1)n\right) = \sum_{n=1}^{k+1} \psi(f_n);$$

hierin bezeichnet $k+1$ die Anzahl der Glieder von P_h, m_0+1 die kleinste ganze Zahl $> \sqrt[3]{x}$ und $> \sqrt{\frac{x}{h+1}}$, und es ist $\frac{x}{m_0+n} + (h+1)n = f_n$ gesetzt. Es ist dann

$$h \leqq \frac{x}{(m_0+k+1)^2} < \frac{x}{(m_0+1)^2} < h+1,$$

und für $1 \leqq n \leqq k$ ist

$$g_n = f_{n+1} - f_n = \frac{x}{m_0+n+1} - \frac{x}{m_0+n} + h + 1 = h + 1 - \frac{x}{(m_0+n)(m_0+n+1)}.$$

Hieraus folgt für $1 \leqq n \leqq k$

$$0 < h+1 - \frac{x}{(m_0+1)^2} < g_n < h+1 - \frac{x}{(m_0+k+1)^2} \leqq 1$$

und für $1 \leqq n \leqq k-1$

$$g_{n+1} - g_n = \frac{x}{(m_0+n)(m_0+n+1)} - \frac{x}{(m_0+n+1)(m_0+n+2)}$$

$$= \frac{2x}{(m_0+n)(m_0+n+1)(m_0+n+2)} > \frac{x}{(m_0+k+1)^3} \geqq \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x^{\frac{3}{7}}},$$

so daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Hieraus ergibt sich (42), und aus (41) und (42) folgt

$$\sum_{m=1}^{[\sqrt{x}]} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = O \sum_{h=1}^{[\sqrt[3]{x}]} \frac{\sqrt[3]{x}}{h} + O(\sqrt[3]{x}) = O(\sqrt[3]{x} \log x).$$

Göttingen, 29. Juli 1920.

(Eingegangen am 31. Juli 1920.)

Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen.

Von

S. Szidon in Budapest.

Einleitung.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit reellen nichtnegativen Gliedern, o liegen ihre sämtlichen Partialsummen unter einer endlichen Schranke, alls dasselbe für jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ zutrifft, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine eliebige monotone Nullfolge[1]) bedeutet.

Dieser von Abel herrührende Satz gestattet folgende Verallgeeinerungen:

1. *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine unendliche Reihe mit reellen (oder komplexen) liedern, so sind ihre Partialsummen* s_n *dem absoluten Betrage nach eschränkt, falls die Partialsummen von* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ *dieselbe Eigenschaft aben, wo* $\{\lambda_n\}$ *wieder eine beliebige monotone Nullfolge bedeutet.*

2. Allgemeiner: *Die* s_n *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sind auch dann absolut eschränkt, wenn die arithmetischen Mittel der Partialsummen von* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ *bei beliebiger monotoner Nullfolge* $\{\lambda_n\}$, *absolut beschränkt sind.*

---

[1]) Unter einer monotonen Nullfolge verstehe ich eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, e von einem gewissen Gliede an monoton und für welche $\lim_{n=\infty} \lambda_n = 0$ ist.

Unter einer konvexen (konkaven) Folge verstehe ich eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, ren zweite Differenzenfolge von einem gewissen Gliede an beständig positiv (negativ) ist.

In Satz 2 haben wir vorausgesetzt, daß die arithmetischen Mittel der Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ beschränkt seien, wenn $\{\lambda_n\}$ eine beliebige monotone Nullfolge bezeichnet. Was läßt sich bezüglich der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ schließen, wenn wir nicht für sämtliche monotone Nullfolgen sondern nur für konvexe Nullfolgen $\{\lambda_n\}$ die Beschränktheit dieser arithmetischen Mittel voraussetzen?

Die Antwort lautet:

3. *Sind die arithmetischen Mittel der Partialsummen von* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ *bei beliebiger konvexer Nullfolge* $\{\lambda_n\}$ *beschränkt, so sind es auch die arithmetischen Mittel von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *selbst.*

In den folgenden Zeilen teilen wir zunächst die Beweise unserer soeben ausgesprochenen Sätze mit.

Auf Grund der Sätze, die den angeführten bei den Funktionenreihen entsprechen, habe ich zwei Fragen beantwortet, die sich auf Fouriersche Reihen beziehen[2]).

Herr Young hat festgestellt, daß die Kosinusreihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$ jedenfalls eine Fourierreihe darstellt, falls die Nullfolge $\{q_n\}$ monoton und auch konvex ist[3]). Die Frage, ob es nicht genügt, damit $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$ eine Fourierreihe sei, daß q_n monoton gegen 0 konvergiere, blieb bei Young unentschieden[4]). Wir beweisen, daß diese Frage in negativem Sinne zu beantworten ist[5]).

Die zweite Aufgabe, die ich erledige, lautet folgendermaßen. Es sind sämtliche Faktorenfolgen $\{\lambda_n\}$ zu bestimmen, mit denen eine beliebige

---

[2]) Unter Fourierreihe verstehen wir die Fourierreihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion.

[3]) W. H. Young, The Fourier-series of bounded fonctions, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 12 (1913), S. 44–45. — Bezüglich der Sinusreihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ vgl. a. a. O. S. 46.

[4]) A. a. O. S. 51–52.

[5]) Die Bedingung ist aber jedenfalls hinreichend, wenn man auch Fourierreihen in Betracht zieht, die zu einer im Riemannschen Sinne integrablen Funktion gehören.

ourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ komponiert werden kann, wenn e entstandene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ wieder eine Fourier-ihe sein soll. Herr Young hat eine ausgedehnte Klasse von solchen olgen angegeben[6]). Wir beweisen, daß damit auch sämtliche Möglich-iten erschöpft sind.

Wir erwähnen noch, daß das Problem der Bestimmung der Faktoren-lgen, die Fourierreihen in Fourierreihen überführen, auch in einer or kurzem erschienenen Arbeit des Herrn Steinhaus aufgeworfen ist[7]).

§ 1.

Beweis des Satzes 3.

Wir schicken folgende zwei Hilfssätze voraus, von deren Richtigkeit an sich leicht überzeugt.

Ist die Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *konkav, und* $\lim_{n=\infty} b_n = \infty$, *so ist die olge* $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}, \ldots$ *konvex.*

Zu einer beliebigen Folge $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, *für welche nur* $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$ *t, läßt sich stets eine konkave Folge* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *konstruieren, ir welche ebenfalls* $\lim_{n=\infty} b_n = \infty$ *ist und außerdem bei jedem n die Un-leichung* $b_n < c_n$ *besteht.*

Der Beweis des Satzes 3 läßt sich nun so führen.

Wir beschränken uns auf solche Folgen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, für welche e Folge $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}, \ldots$ konkav ausfällt. Bedeuten nun S_n und S_n' ie n-ten arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ und bezeichnen wir $\frac{1}{\lambda_n}$ mit μ_n, so erhalten wir durch zweimalige artielle Summation die Identität

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} S_k' + \mu_n S_n',$$

o

$$c_{nk} = \frac{(n-k)\,k\,\Delta^2\mu_k - k(\Delta\mu_k + \Delta\mu_{k+1})}{n}$$

---

[6]) W. H. Young, On Fourier-series and fonctions of bounded variation, Lond. oy. Soc. Proc. 88 (1913), S. 561–568.

[7]) H. Steinhaus, Additive und stetige Funktionaloperationen. Diese Zeitschr. (1919), S. 186–221.

ist. Sämtliche c sind negativ und unabhängig von den S und S'. Wir $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 1$ gesetzt, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} + \mu_n = \mu_1.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n-1} |c_{nk}| + \mu_n = 2\mu_n - \mu_1.$$

Wäre nun die Folge $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ nicht beschränkt, so ließ sich aus ihr eine Teilfolge $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots$ herausgreifen, für welch $\lim_{k=\infty} |S_{n_k}| = \infty$ wäre. Wählen wir nun die Faktoren derart, da $|\mu_{n_k}| < |S_{n_k}|^{\frac{1}{2}}$ sei und bezeichnen die von n unabhängige obere Grenz von $|S_n'|$ mit M, so erhalten wir

$$|S_{n_k}| < 2M |S_{n_k}|^{\frac{1}{2}},$$

was offenbar unmöglich ist. Die Folge $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ist also be schränkt, w. z. b. w.

Ein Analogon des soeben bewiesenen Satzes lautet folgendermaßen

Satz 3*. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *eine Reihe, deren Glieder im Intervall* $\beta \leqq x \leqq \gamma$ *im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Dann sind di Zahlen*

$$\int_\beta^\gamma |S_n(x)|\,dx$$

beschränkt, wo $S_n(x)$ *das n-te arithmetische Mittel der Partialsumme der gegebenen Funktionenreihe bedeutet, falls es die Zahlen*

$$\int_\beta^\gamma |S_n^*(x)|\,dx$$

sind, wo $S_n^*(x)$ *das n-te arithmetische Mittel der Partialsummen der Reih* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x)$ *bedeutet, in welcher* $\{\lambda_n\}$ *irgendeine konvexe Nullfolge be zeichnet.*

Der Beweis läßt sich ganz analog führen.

§ 2.

Beweis des Satzes 2.

Satz 2 läßt sich nun so beweisen: Wir gehen aus von der Identität

$$S_n' = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k - \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, s_k \Delta \lambda_k}{n},$$

o S_n' dieselbe Bedeutung hat, wie im vorigen Paragraphen und $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ ist.

Aus der schon bewiesenen Beschränktheit der Folge $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

lgt nun durch partielle Summation die Beschränktheit von $\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k}{n}$, wenn monoton gegen 0 konvergiert. Also muß auch

$$\sigma_n = \frac{-\sum_{k=1}^{n} (n-k)\, s_k \Delta \lambda_k}{n}$$

schränkt sein für jede die Bedingungen des Satzes 2 erfüllende λ-Folge.

Nehmen wir nun an, die Folge $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ sei nicht beschränkt. ann läßt sich eine Indexfolge $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ angeben, für welche le s_{n_k} von gleichem Vorzeichen, etwa alle positiv sind und die Un-eichungen

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > 2, \qquad \frac{s_{n_k+1}}{s_{n_k}} > 8$$

stehen. Setzen wir nun

$$\lambda_n = \frac{1}{2^k} \quad \text{für} \quad n_k < n \leqq n_{k+1},$$

ist, wie man leicht einsieht,

$$\lim_{n_k=\infty} \sigma_{2n_k} = \infty.$$

e Folge $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ muß also in der Tat beschränkt sein.

Man beweist ganz analog den

Satz 2*. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *eine Reihe, deren Glieder im Intervalle* $\leqq x \leqq \gamma$ *im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Dann sind die ahlen*

$$\int_{\beta}^{\gamma} |s_n(x)|\, dx$$

beschränkt, wo $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der gegebenen Funktionenreihe bedeutet, falls es die Zahlen

$$\int_{\beta}^{\gamma} |S_n^*(x)|\,dx$$

sind, wo $S_n^*(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x)$ bedeutet, in welcher $\{\lambda_n\}$ irgendeine monotone Nullfolge bezeichnet.

§ 3.

Anwendungen auf die Fourierreihen.

Wir gehen nun zu den in der Einleitung angekündigten Anwendungen unserer Sätze auf die Theorie der Fourierschen Reihen über.

Der Beweis der Existenz von Kosinusreihen, die, trotzdem ihre Koeffizienten monoton gegen 0 konvergieren, keine Fourierreihen sind, ergibt sich durch folgende Überlegung. Wäre $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos nx$ immer eine Fourierreihe, wenn q_n monoton gegen 0 konvergiert, so müßten die „geometrischen Integrale" der arithmetischen Mittel ihrer Partialsummen beschränkt sein[8]). Daraus könnten wir aber auf Grund des Satzes 2* schließen, daß $\int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| dx$ in n beschränkt sei, was bekanntlich nicht der Fall ist. Es gibt also in der Tat Kosinusreihen mit monoton gegen 0 konvergierenden Koeffizienten, die keine Fourierreihen sind. Hingegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos nx$, wie sich leicht beweisen läßt, immer eine Fourierreihe, wenn $q_n \log n$ monoton beschränkt in n oder allgemeiner $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta q_n \log n|$ konvergent ist; der Faktor $\log n$ läßt sich hierbei durch keinen anderen konkaven c_n, für welchen $\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{\log n} = 0$, ersetzen[9]).

---

[8]) Unter dem geometrischen Integral der Funktion $f(x)$ verstehen wir $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

[9]) Ein Korollar dieses Satzes ist: $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos nx$ ist eine Fourierreihe, wenn q_n monoton gegen 0 konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n}$ konvergent ist. Ist also die Sinusreihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ mit monoton gegen 0 konvergierenden Koeffizienten eine Fourierreihe, so folgt dies auch für $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos nx$.

Die Faktorenfolgen, die eine beliebige Fourierreihe wieder in eine ourierreihe überführen, lassen sich auf folgende Weise ermitteln. Ist $, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine Faktorenfolge von der fraglichen Eigenschaft, so uß, wenn $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ eine konvexe Nullfolge bilden, die trigono-

etrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n q_n \cos nx$ stets eine Fourierreihe sein; die geo-

etrischen Integrale der arithmetischen Mittel der letzteren Reihe sind lso beschränkt; laut Satz 3^* läßt sich dies auch von der Reihe

$\sum_{=0}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ behaupten. Dies besagt aber eben, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ durch liedweise Differentiation der Fourierreihe einer Funktion von be-chränkter Schwankung entstanden ist[10]).

Auf diese Weise erhält man aber eben jene, schon in der Einleitung rwähnten Faktorenfolgen, von denen Herr Young bewiesen hat, daß sie ie verlangte Eigenschaft besitzen.

---

[10]) W. H. Young, On a condition that trigonometrical series should have a ertain form, Lond. Roy. Soc. Proc. **88** (1913), S. 569—574.

(Eingegangen am 27. Juli 1920.)

Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Satz: *Es konvergiere die nicht identisch verschwindende Dirichlet-*
sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > \sigma_0$; $\delta > 0$ *sei fest.* $A(T)$ *bezeichne die Wurzelzahl im Gebiet* $\sigma \geqq \sigma_0 + \delta$, $T < t \leqq T + 1$. *Dann ist*

$$A(T) = o(\log^2 T). \quad (1)$$ [1])

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sigma_0 = 0$,

$$f(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

und diese Reihe für ein $s < 0$ konvergent. Dann ist $B(x) = \sum_{\lambda_2 \leqq \lambda_n \leqq x} a_n$ beschränkt:

$$|B(x)| \leqq c.$$

Es sei w eine feste ganze Zahl > 2. Für $\sigma \geqq \frac{\log t}{\lambda_w}$, $t > \tau_1 > 1$ ist

$$\left| \sum_{n=w}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \right| = \left| -B(\lambda_{w-1}) e^{-\lambda_w s} + s \int_{\lambda_w}^{\infty} B(u) e^{-us} du \right| \leqq c \left(2 + \frac{t}{\sigma}\right) e^{-\lambda_w \sigma} <$$

---

[1]) Die Relation $A(T) = O(\log^2 T)$ steht in meiner Arbeit *Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen* [Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1913, S. 897–907], S. 902–904. Der Satz des Textes ist in dem kürzlich von Herrn Wennberg, *Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen* [Inaugural-Dissertation, Uppsala, 1920, 66 S.], S. 12–16, bewiesenen Satz

$$\sum_{T \leqq n \leqq T + \log T} A(n) = O(\log^2 T)$$

weder enthalten noch umgekehrt.

o ist für $\sigma \geqq \frac{\log t}{\lambda_w}$, $t > \tau_2 > 1$

$$|f(s)| > 1 - \left|\sum_{n=2}^{w-1} a_n e^{-\lambda_n s}\right| - \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Ich wähle $\tau_3 > \tau_2$ so, daß $\frac{\log \tau_3}{\lambda_w} > \delta$ ist und die Zahlen

$$r = \frac{\log(T+\frac{1}{2})}{\lambda_w}, \quad \varrho = \sqrt{(r-\delta)^2 + \tfrac{1}{4}} \quad (= r - \delta + o(1))$$

$T > \tau_3$ die Ungleichungen

$$r > \varrho > \sqrt{\left(\frac{\log(T+1)}{\lambda_w} - r\right)^2 + \frac{1}{4}} \quad (\sim \tfrac{1}{2})$$

üllen. Dann enthält der Kreis $|s - s_1| \leqq \varrho$ um $s_1 = r + (T + \frac{1}{2})i$ für $> \tau_3$ das Gebiet $\delta \leqq \sigma \leqq \frac{\log t}{\lambda_w}$, $T < t \leqq T+1$, so daß $A(T)$ nach (2) hstens gleich der Wurzelzahl von $f(s)$ in $|s - s_1| \leqq \varrho$ ist. Der Kreis $- s_1| \leqq r$ gehört der Halbebene $\sigma \geqq 0$ an; für $\sigma \geqq 0$, $t > 1$ ist be-ntlich $|f(s)| < c_1 t$; für $|s - s_1| \leqq r$, $T > \tau_4 > \tau_3$ ist also $|f(s)| < 2c_1 T$. Jacobi-Jensensche Satz ergibt also für $T > \tau_4$ nach (2)

$$A(T) < \frac{\log(4c_1 T)}{\log \frac{r}{\varrho}} \sim \frac{\log^2 T}{\delta \lambda_w}.$$

ıer ist für jedes ganze $w > 2$

$$\limsup_{T=\infty} \frac{A(T)}{\log^2 T} \leqq \frac{1}{\delta \lambda_w},$$

(1) ist bewiesen.

Göttingen, den 3. Februar 1921.

(Eingegangen am 4. Februar 1921.)

Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörpe

Erste Abhandlung.

Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes.

Von

Leon Lichtenstein in Münster i. W.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erstes Kapitel. Existenzbeweis der Gleichgewichtsfigur.

§ 1. Problemstellung.

§ 2. Auflösung der fundamentalen Integro-Differentialgleichu durch sukzessive Approximationen.

§ 3. Diskussion der Verzweigungsgleichung.

§ 4. Die Gestalt der Gleichgewichtsfigur in einer ersten Näherun

Zweites Kapitel. Stabilität der Gleichgewichtsfigur.

Drittes Kapitel. Hilfsbetrachtungen.

§ 1. Einige Formeln aus der Theorie der Kugelfunktionen.

§ 2. Bestimmung einiger einfacher Integralausdrücke.

§ 3. Bestimmung einiger im ersten Kapitel benutzter komp zierter Integralausdrücke.

In dem § 22 des dritten Bandes der *Mécanique Céleste* beschäft sich Laplace mit der Figur des Erdmondes[1]). Er geht von der A nahme aus, daß der Mond einmal aus einer homogenen, unzusamme drückbaren Flüssigkeit bestand, unter der Wirkung der Eigengravitatio der Erdanziehung und der Zentrifugalkräfte im Gleichgewichte war u seine Gestalt nach der Erstarrung beibehielt. Das von Laplace beha delte Problem lautet genauer wie folgt.

---

[1]) Man vergleiche den demnächst erscheinenden Enzyklopädie-Artikel von He S. Oppenheim, „Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper". D findet sich unter 26 die weitere Literatur zusammengestellt.

Sei Σ ein System, bestehend aus einem homogenen kugelförmigen ziehungszentrum M, das festgehalten wird, und einer außerhalb von M ndlichen Flüssigkeitsmasse T_1. Das System Σ rotiert gleichförmig ein starrer Körper um eine durch den Mittelpunkt von M hindurch- ende Achse. *Gibt es für hinreichend große Entfernungen der beiden Körper ichgewichtsfiguren T_1, die sich wenig von einer Kugel unterscheiden?* Laplace findet, indem er sich mit einer ersten Annäherung begnügt, es tatsächlich Gleichgewichtsfiguren der gesuchten Art gibt. Sie haben Form dreiachsiger Ellipsoide, deren größte Achse nach dem Zentral- per hin gerichtet ist. Die Vernachlässigung der Glieder höherer Ord- g, der dieses Resultat zu verdanken ist, bedeutet indessen einen Ver- t auf die exakten hydrodynamischen Gleichungen und damit auf die nge Begründung der ganzen Theorie überhaupt.

Die Ergebnisse und Methoden der bekannten Arbeiten von A. Lia- unoff sowie meiner vor kurzem veröffentlichten Abhandlungen über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten gestatten die Existenz von Laplace postulierten Körper streng zu beweisen[2]). Der Existenz- veis hängt, wie an der zuletzt zitierten Stelle, mit der Auflösung einer htlinearen Integro-Differentialgleichung zusammen. Die Behandlung ser Gleichung fällt verschieden aus, je nachdem eine gewisse lineare egralgleichung Eigenfunktionen hat oder nicht. Hier liegt nun der tere Fall vor. Dies hat zur Folge, daß eine „Verzweigungsgleichung" einzelne untersucht werden muß. Man sieht sich gezwungen, die eder zweiter Ordnung wirklich zu bestimmen, was ziffernmäßige Be- hnungen notwendig macht. Um den Gang der Betrachtungen nicht unterbrechen, sind alle Hilfsrechnungen in den Anhang verlegt worden. verdient hervorgehoben zu werden, daß sich die sonst sehr umständ- en Rechnungen durch Benutzung kartesischer Koordinaten verhältnis- ßig einfach gestalten[3]).

---

[2]) Siehe L. Lichtenstein, „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren erender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze ehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze", h. Zeitschrift, **1** (1918), S. 229–284; **3** (1919), S. 172–174; „Zweite Abhandlung. bilitätsfragen", Math. Zeitschrift, **7** (1920), S. 126–231. Diese Arbeiten werden folgenden kurz als Abh. I und Abh. II bezeichnet.

Man vergleiche insbesondere Kapitel III § 6 der Abh. II. In der Einleitung dieser und zu der ersten Abhandlung habe ich die Beziehungen meiner Arbeiten denjenigen von A. Liapounoff ausführlich besprochen.

[3]) Es dürfte vielleicht die Bemerkung nicht ganz überflüssig sein, daß es sich der vorliegenden Arbeit zunächst um eine rein mathematische Untersuchung delt, durch die das Problem der gegenwärtigen Gestalt des Erdmondes, der be- ntlich keine Gleichgewichtsfigur darstellt, keineswegs erledigt wird.

Erstes Kapitel.

Existenzbeweis der Gleichgewichtsfigur.

§ 1.

Problemstellung.

Wir beziehen die Lage der Punkte im Raume auf ein festes Koordinatensystem x_0, y_0, z_0, dessen Ursprung in dem Mittelpunkt des Erdkörpers M liegt und dessen z_0-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt (Fig. 1). Sei jetzt T eine Kugel vom Halbmesser r, deren Mittelpunkt O die Koordinaten (0, 0, 0) hat; ihre Oberfläche heiße S. Durch O denken wir uns parallel zu x_0, y_0, z_0 ein neues System von Koordinatenachsen x, y, z gelegt. Die Koordinatenachsen x_0 und x fallen offenbar zusammen. Sei S_1 die Oberfläche des Monokörpers T_1. Nach Voraussetzung soll S_1 in einer Umgebung erster Ordnung von S liegen. Sei $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ ein Punkt auf S_1 und es sei $P = (X, Y, Z)$ der Fußpunkt des Lotes (ν) von P_1 auf S. Die Strecke PP_1, positiv nach außen gerichtet, sei mit ζ bezeichnet. Wir denken uns die Lage der Punkte auf S durch irgendein System der Gaußschen Parameter (ξ, η) definiert[4]. Für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, etwa $|\zeta| < \varepsilon^*$, läßt sich, wie man leicht sieht, die Lage des Punktes P_1 in eindeutiger Weise durch das System der krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ bestimmen. Wir dürfen annehmen, daß die Funktion $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ eindeutig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung hat.

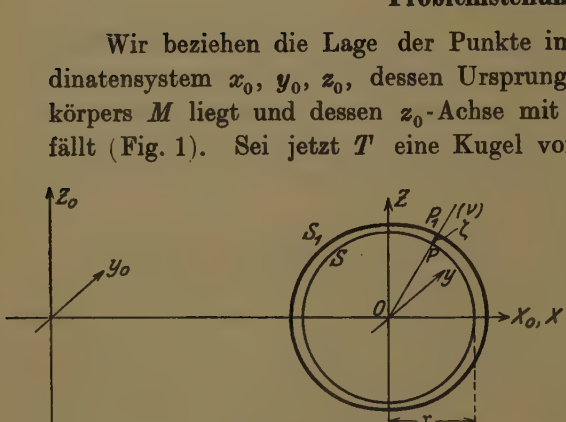

Fig. 1.

Wir denken uns jetzt das System der Körper M und T_1 um die z_0-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotieren. *Gibt es für große l und in geeigneter Weise gewählte Werte von ω Körper T_1*

[4]) Man denkt sich in bekannter Weise S von einer Anzahl Flächenstücke dachziegelartig überdeckt. Jedem dieser Flächenstücke wird ein System der Parameter (ξ, η) zugeordnet. Die Funktionen $X = X(\xi, \eta)$, $Y = Y(\xi, \eta)$, $Z = Z(\xi, \eta)$ haben stetige Ableitungen erster Ordnung. Der Ausdruck

$$\left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^2$$

ist von Null verschieden.

daß das System M, T_1 sich im relativen Gleichgewichte befindet?
n Körper M denkt man sich natürlich festgehalten.

Die auf T_1 wirkenden Kräfte sind: die Anziehung des Zentralkörpers M, Eigengravitation und die Zentrifugalkräfte. Sei

$$V_1(x, y, z) = \int_{T_1} \frac{d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}}{[(\bar{x}-x)^2+(\bar{y}-y)^2+(\bar{z}-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Newtonsche Potential von T_1 im Punkte (x, y, z), M die Masse Zentralkörpers, f die Dichte der Flüssigkeit, $\varkappa$ die Gaußsche Gravionskonstante. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, S_1 eine Figur des relativen Gleichgewichtes einschließt, lauten bentlich

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega^2}{2}(Y_1^2+(l+X_1)^2) + \varkappa \frac{M}{[(l+X_1)^2+Y_1^2+Z_1^2]^{\frac{1}{2}}} = C \quad (C \text{ konstant}).$$

$V(x, y, z)$ das Newtonsche Potential der Kugel T. Augenscheinist

$$V(X, Y, Z) = C_1 \qquad (C_1 \text{ konstant}).$$

(2) kann man darum auch schreiben

$$\varkappa f\{V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z)\} + \frac{\omega^2}{2}\{Y_1^2+(l+X_1)^2\} + \varkappa \frac{M}{[(l+X_1)^2+Y_1^2+Z_1^2]^{\frac{1}{2}}} = \varkappa f s \qquad (s \text{ konstant}).$$

r setzen

$$\begin{cases} V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta), \\ V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta). \end{cases}$$

nehmen

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| < \varepsilon \leqq \varepsilon^*$$

unter ε eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden. Die Fläche S_1 jetzt in der Tat in einer Umgebung erster Ordnung von S enthalten.

Wie in meinen eingangs zitierten Abhandlungen gezeigt worden ist, t sich der Ausdruck

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$$

eine nach Gliedern verschiedener Ordnung in bezug auf ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ fortreitende gleichmäßige konvergierende Reihe entwickeln

$$U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots [5]).$$

---

[5]) Geht ζ in $\alpha\zeta$ über, so geht hierbei $U^{(n)}$ in $\alpha^n U^{(n)}$ über.
Die Entwicklungen der loc. cit. [2]) genannten Arbeiten gelten für beliebige, etwa

Um die expliziten Formeln für $U^{(n)}$ hinschreiben zu können, führe wir einige weiteren Bezeichnungen ein. Wir bezeichnen den Punkt $(\xi, \eta$ kürzer mit σ, das Flächenelement in σ mit $d\sigma$, die nach außen gerichtete Normale durch σ mit (ν). Die entsprechenden zu dem Punkte $(\xi', \eta$ gehörigen Werte werden mit einem Akzent oben gekennzeichnet. D Abstand der Punkte σ und σ' heiße ϱ.

Die Kugel T übt auf eine in einem Punkte ihrer Oberfläche befin liche Masseneinheit, wie man leicht sieht, eine Anziehungskraft aus, d nach dem Mittelpunkt hin gerichtet ist und den Wert

$$-\tfrac{4}{3}\pi\tau\varkappa f = \varkappa f\psi \quad (8)$$

hat.

Es seien a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν),

$$a = \frac{X}{\tau}, \quad b = \frac{Y}{\tau}, \quad c = \frac{Z}{\tau}. \quad (9)$$

Sei ferner

$$A_t = \frac{\partial(Y + bt\zeta, Z + ct\zeta)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad B_t = \frac{\partial(Z + ct\zeta, X + at\zeta)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad C_t = \frac{\partial(X + at\zeta, Y}{\partial(\xi, \eta)} \quad (10)$$

Wir denken uns die Parameter ξ, η so gewählt, daß

$$a = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \ldots \quad A = A_t \text{ für } t = 0$$

gilt.

Die $a, b, c, \zeta, A_t, \ldots$ entsprechenden Werte im Punkte (ξ', η') werde mit $a', b', c', \zeta', A_t', \ldots$ bezeichnet. Wir setzen weiter

$$\varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t\sum(X' - X)(a'\zeta' - a\zeta) + t^2\sum(a'\zeta' - a\zeta)^2. \quad (11)$$

Wie man leicht sieht, ist ϱ_t der Abstand der beiden Punkte

$$\left\{ \begin{array}{ll} & P_t = (X + at\zeta, Y + bt\zeta, Z + ct\zeta) \\ \text{und} & \\ & P_t' = (X' + a't\zeta', Y' + b't\zeta', Z' + c't\zeta'). \end{array} \right. \quad (12)$$

Offenbar liegt P_t auf (ν) im Abstande $t\zeta$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ von $(X, Y, Z$ Es sei schließlich τ der Kosinus des von (ν) und dem Lote von $(\xi, \eta$ auf die Umdrehungsachse[7]) eingeschlossenen Winkels[8]).

---

von Flächen mit stetiger Normale begrenzte Körper und beliebige Parameter ξ, In dem besonderen Falle der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren findet sich d Entwicklung (7) bereits bei A. Liapounoff, bei dem sie auf einem anderen Weg abgeleitet wird. Liapounoff bedient sich bei seinen Betrachtungen eines spezielle Systems krummliniger Koordinaten, das mit elliptischen Koordinaten zusammenhäng

[6]) Wir nehmen die wie (ν) gerichteten Kräfte als positiv an.

[7]) Von dieser nach (ξ, η) hin gerichtet.

[8]) Man vergleiche die Ausführungen im Kapitel I der Abh. I sowie Kapitel

Es gilt jetzt

$$\begin{cases} U^{(1)} = \psi\zeta + \int\limits_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma', \\ U^{(n)} = \frac{1}{n!}\int\limits_S \sum (a'\zeta' - a\zeta)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{A_i'}{\varrho_t}\right)\right]_{t=0} d\xi' d\eta' \qquad (n>1). \end{cases}$$

(4) können wir darum setzen

$$\varkappa f\left[\psi\zeta + \int\limits_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right] + \mathsf{P} = \varkappa f s,$$

$$\mathsf{P} = \frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + (l + X_1)^2] + \frac{\varkappa M}{[(l+X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

entwickeln jetzt den zweiten Summanden in P nach Potenzen von $\frac{1}{l}$.

Es gilt

$$\frac{\varkappa M}{[(l+X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varkappa M}{l}\left\{1 + \frac{2X_1}{l} + \frac{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}{l^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\varkappa M}{l}\left\{1 - \frac{X_1}{l} - \frac{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}{2l^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2X_1}{l}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= \frac{\varkappa M}{l}\left\{1 - \frac{X_1}{l} - \frac{Y_1^2 + Z_1^2 - 2X_1^2}{2l^2} + \ldots\right\}.$$

dererseits ist

$$\frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + (l + X_1)^2] = \frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + 2lX_1 + X_1^2 + l^2].$$

wählen aus Gründen, die später ersichtlich werden, ω^2 so, daß die eder mit X_1 sich wegheben. Wir setzen also

$$\omega^2 l = \frac{\varkappa M}{l^2},$$

hin

$$\omega^2 = \frac{\varkappa M}{l^3}.$$

Alsdann wird

$$\mathsf{P} = \frac{\varkappa M}{l}\left\{\frac{3}{2} - \frac{Z_1^2 - 3X_1^2}{2l^2} + \ldots\right\},$$

Abb. II. Die Bezeichnungen sind gegenüber den an jener Stelle gebrauchten ein ig geändert. Dort ist die z-Achse zugleich die Umdrehungsachse des Systems. t ist ferner $\varkappa f\psi$ die „Schwerkraft" am Umfange der Ausgangsfigur des relativen ichgewichtes; in $\varkappa f\psi$ geht bereits die Zentrifugalkraft ein. Im vorliegenden Falle die Ausgangsfigur die *ruhende* Kugel T in unendlich großer Entfernung von dem tralkörper M. Der Wert $\varkappa f\psi$ spielt darum hier dieselbe Rolle wie der an jener lle ebenso bezeichnete Wert.

wo die nicht hingeschriebenen Glieder in bezug auf $\frac{\mathfrak{r}}{l}$ vom dritten oder höheren Grade sind. Wegen

$$X_1 = X\left(1+\frac{\zeta}{\mathfrak{r}}\right), \qquad Z_1 = Z\left(1+\frac{\zeta}{\mathfrak{r}}\right) \tag{21}$$

ist

$$\mathsf{P} = \frac{\varkappa M}{l}\left\{\frac{3}{2} - \frac{Z^2-3X^2}{2l^2} - \frac{Z^2-3X^2}{l^2}\frac{\zeta}{\mathfrak{r}} - \frac{Z^2-3X^2}{2l^2}\frac{\zeta^2}{\mathfrak{r}^2} + \dots\right\}. \tag{22}$$

Die Beziehung (14) gibt jetzt, wenn man

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{M}{lf} \tag{23}$$

setzt,

$$\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = -U^{(2)} - U^{(3)} - \dots + \frac{1}{\varkappa f}\left(-\mathsf{P} + \frac{3\varkappa M}{2l}\right), \tag{24}$$

$$\psi = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}.$$

§ 2.

Auflösung der fundamentalen Integro-Differentialgleichung durch sukzessive Approximationen.

Die lineare Integralgleichung

$$\zeta - \nu\int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0 \tag{25}$$

hat, wie man weiß, die Eigenwerte

$$\frac{1}{4\pi\mathfrak{r}}, \quad \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}, \quad \frac{5}{4\pi\mathfrak{r}}, \dots. \tag{26}$$

Der Eigenwert $\frac{2n+1}{4\pi\mathfrak{r}}$ ist $(2n+1)$-fach. Die zugehörigen linear unabhängigen Eigenfunktionen sind die $(2n+1)$ allgemeinen Kugelfunktionen n-ter Ordnung.

Die Integralgleichung

$$-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0 \tag{27}$$

hat demnach drei linear unabhängige Eigenfunktionen. Es sind dies z. B. die drei allgemeinen Kugelfunktionen

$$\frac{Z}{\mathfrak{r}}, \quad \frac{X}{\mathfrak{r}}, \quad \frac{Y}{\mathfrak{r}}. \tag{28}$$

Wir bezeichnen diese Nullösungen, in der üblichen Weise normiert, it u_1, u_3, u_4. Es gilt demnach

9) $$\int_S \psi u_1^2 d\sigma = \int_S \psi u_3^2 d\sigma = \int_S \psi u_4^2 d\sigma = -1 \text{ [9]}.$$

Man findet leicht

0) $$u_1 = \frac{3}{4\pi}\frac{Z}{r^{\frac{5}{2}}}, \qquad u_3 = \frac{3}{4\pi}\frac{X}{r^{\frac{5}{2}}}, \qquad u_4 = \frac{3}{4\pi}\frac{Y}{r^{\frac{5}{2}}} \text{ [10]}.$$

i

1) $$N_1 = \frac{1}{\varrho} - \psi\psi'(u_1u_1' + u_3u_3' + u_4u_4') = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r^3}(XX' + YY' + ZZ').$$

ie Integralgleichung

2) $$-\frac{4\pi}{3}r\zeta + \int_S N_1\zeta' d\sigma' = 0$$

t nach bekannten Sätzen keine Nullösungen mehr. Sei

3) $$r_1 = -\int_S \psi' u_1'\zeta' d\sigma', \quad r_3 = -\int_S \psi' u_3'\zeta' d\sigma', \quad r_4 = -\int_S \psi' u_4'\zeta' d\sigma'.$$

Die Integro-Differentialgleichung (24) kann wegen (31) und (33) auf e Form

4) $$\psi\zeta + \int_S N_1\zeta' d\sigma'$$

$$= \psi(r_1u_1 + r_3u_3 + r_4u_4) - U^{(2)} - U^{(3)} - \ldots + \frac{1}{\varkappa f}\left(-\mathsf{P} + \frac{3\varkappa M}{2l}\right)$$

bracht werden.

Wir nehmen an, daß die gesuchte Gleichgewichtsfigur in bezug auf e Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ symmetrisch ist. Alsdann ist

5) $$r_1 = r_4 = 0$$

d die Integro-Differentialgleichung (34) geht über in

$$-\frac{3}{4\pi r}\int_S N_1\zeta' d\sigma' = r_3u_3 + \frac{3}{4\pi r}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots) + \frac{3}{4\pi\varkappa f r}\left(\mathsf{P} - \frac{3\varkappa M}{2l}\right).$$

[9]) Man beachte, daß $\psi < 0$ ist.

[10]) Die Bezeichnungen schließen sich an die in den Abhandlungen I und II ge-uchten an. Dort sind u_1 und u_2 die trivialen Nullösungen der Integralgleichung $+\int_S \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0$. Bei Rotationskörpern ist $u_2 \equiv 0$ zu setzen. Es sei in diesem le $\mathfrak{s}$ die längs einer Meridianlinie gemessene Entfernung des Punktes σ von einem e der Fläche, $\mathfrak{d}$ der Azimutwinkel. Die etwa noch vorhandenen nicht trivialen llösungen sind entweder von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ oder sie treten paarweise auf und en die Gestalt $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d}$. Im vorliegenden Falle ist

$$u_3 = \frac{3}{4\pi}\frac{\sin\mathfrak{s}\cos\mathfrak{d}}{r^{\frac{3}{2}}}, \qquad u_4 = \frac{3}{4\pi}\frac{\sin\mathfrak{s}\sin\mathfrak{d}}{r^{\frac{3}{2}}},$$

nach $k = 1$.

Alle Glieder der Entwicklung von $\frac{3}{4\pi\varkappa f\mathfrak{r}}\left(\mathsf{P}-\frac{3\varkappa M}{2l}\right)$ haben den gemeinsamen Faktor

$$\overline{M}=-\frac{3M}{8\pi f l^3\mathfrak{r}}. \tag{37}$$

Wir setzen

$$\frac{3}{4\pi\varkappa f\mathfrak{r}}\left(\mathsf{P}-\frac{3\varkappa M}{2l}\right)=\overline{M}Q_0(\sigma)+\overline{M}Q_1(\sigma)\zeta+\overline{M}Q_2(\sigma)\zeta^2+\dots. \tag{38}$$

Aus (36) und (38) folgt

$$\zeta-\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\int_S N_1\zeta' d\sigma'=r_3u_3+\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}(U^{(2)}+U^{(3)}+\dots)+\overline{M}Q_0(\sigma) \tag{39}$$
$$+\overline{M}Q_1(\sigma)\zeta+\overline{M}Q_2(\sigma)\zeta^2+\dots=R\{r_3,\overline{M};\zeta\}.$$

Aus den Betrachtungen der Abhandlungen I und II, die im vorliegenden Falle nur unwesentlich zu modifizieren sind, folgt, daß für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von r_3 und $\overline{M}$ die Integro-Differentialgleichung (39) eine und nur eine Lösung hat, die den Beziehungen

$$|\zeta|,\ \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|<\varepsilon \tag{40}$$

genügt[11]). Die Lösung ζ bestimmt sich durch sukzessive Approximationen. Wir setzen

---

[11]) Für das Gelingen des Beweises ist wesentlich, daß für alle den Ungleichheiten (40) und

$$|\overline{M}|<\varepsilon \tag{40*}$$

genügenden $\overline{M}$ und ζ

$$|R_1|,\ \left|\frac{\partial R_1}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial R_1}{\partial\eta}\right|<\alpha^*\varepsilon^2 \qquad (\alpha^*\text{ konstant}) \tag{A}$$

gilt, unter $R_1\{\overline{M};\zeta\}$ die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf $\overline{M}, \zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ in (39) rechter Hand verstanden. Es gilt ferner für $\tilde{R}_1=R_1\{\overline{M};\tilde{\zeta}\}$, $\mathring{\zeta}=\zeta-\tilde{\zeta}$:

$$|R_1-\tilde{R}_1|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(R_1-\tilde{R}_1)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(R_1-\tilde{R}_1)\right|<\alpha_*\varepsilon\,\mathrm{Max}\left(|\mathring{\zeta}|,\ \left|\frac{\partial\mathring{\zeta}}{\partial\xi}\right|,\ \left|\frac{\partial\mathring{\zeta}}{\partial\eta}\right|\right) \tag{B}$$
$$(\alpha_*\text{ konstant}).$$

In der Abh. I S. 245—247 sowie S. 282—284 (vgl. auch die Abh. II S. 145—146 und S. 162) ist gezeigt worden, daß der Ausdruck

$$R_2\{\zeta\}=U^{(2)}+U^{(3)}+\dots$$

Ungleichheiten erfüllt, die zu (A) und (B) analog sind. Es ist leicht einzusehen, daß dies auch für

$$\overline{M}Q_1(\sigma)\zeta+\overline{M}Q_2(\sigma)\zeta^2+\dots$$

zutrifft.

$$\begin{cases} \zeta_1 - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\int_S N_1\zeta_1' d\sigma' = R\{r_3, \overline{M}; 0\}, \\ \zeta_2 - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\int_S N_1\zeta_2' d\sigma' = R\{r_3, \overline{M}; \zeta_1\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{41}$$

nd erhalten, unter $H_1(\sigma, \sigma')$ den lösenden Kern des Kernes $\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}} N_1(\sigma, \sigma')$ erstanden,

$$\begin{cases} \zeta_1(\sigma) = R\{r_3, \overline{M}; 0\} - \int_S H_1(\sigma, \sigma') R'\{r_3, \overline{M}; 0\} d\sigma', \\ \zeta_2(\sigma) = R\{r_3, \overline{M}; \zeta_1\} - \int_S H_1(\sigma, \sigma') R'\{r_3, \overline{M}; \zeta_1'\} d\sigma', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{42}$$

ier bezeichnet z. B. $R'\{r_3, \overline{M}; \zeta_1'\}$ den Ausdruck, den man erhält, wenn an in $R\{r_3, \overline{M}; \zeta_1\}$ für σ durchweg σ' setzt.

Wie in der Abh. II S. 157—165 läßt sich zeigen, daß die Folgen

$$\zeta_n, \quad \frac{\partial\zeta_n}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\zeta_n}{\partial\eta} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

uf S gleichmäßig konvergieren. Die Funktion

$$\zeta = \lim_{n=\infty} \zeta_n \tag{44}$$

t nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung auf S stetig. Sie ßt sich für alle hinreichend kleinen Werte von $|r_3|$, $|\overline{M}|$ nach ganzen ositiven Potenzen von r_3 und $\overline{M}$ entwickeln. Wir setzen

$$\zeta(\sigma) = \zeta^{(1)}(\sigma) + \zeta^{(2)}(\sigma) + \ldots, \tag{45}$$

nter $\zeta^{(n)}(\sigma)$ die Glieder n-ten Grades verstanden.

Wie auf S. 260—261 der Abh. I (vgl. auch die Abh. II, S. 164—165) ßt sich zeigen, daß ζ in bezug auf die Ebenen $z = 0$ und $y = 0$ symetrisch ist. Die Beziehungen $r_1 = 0$, $r_4 = 0$ sind demnach erfüllt. Die och übrig bleibende Beziehung

$$-\int \psi u_3 \zeta d\sigma = r_3 \tag{46}$$

gibt eine Gleichung zur Bestimmung des Parameters r_3 als Funktion on $\overline{M}$. Die Diskussion dieser „Verzweigungsgleichung" bildet den Kernunkt der ganzen Untersuchung.

§ 3.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Für das Folgende erscheint es notwendig, die Glieder ersten und weiten Grades von $\zeta(\sigma)$ explizite anzugeben.

Die Glieder ersten Grades sind, wie man sich leicht überzeugt,

$$\zeta^{(1)}(\sigma) = r_3 u_3 + \overline{M} Q_0(\sigma) - \int_S H_1(\sigma, \sigma')[r_3 u_3' + \overline{M} Q_0(\sigma')]\, d\sigma'. \tag{47}$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$\int_S H_1(\sigma, \sigma') u_3'\, d\sigma' = 0, \tag{48}$$

ferner (vgl. Kapitel III, § 1)

$$\int_S H_1(\sigma, \sigma')\, d\sigma' = \tfrac{3}{2}. \tag{49}$$

Die Glieder ersten Grades können darum einfacher

$$\zeta^{(1)}(\sigma) = r_3 u_3 + \overline{M} Q_0(\sigma) - \overline{M} \int_S H_1(\sigma, \sigma') Q_0(\sigma')\, d\sigma' \tag{50}$$

geschrieben werden.

Die Glieder zweiten Grades sind

$$\zeta^{(2)}(\sigma) = \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}} U^{(2)}\{\zeta^{(1)}(\sigma)\} + \overline{M} Q_1(\sigma) \zeta^{(1)}(\sigma) - \int_S H_1(\sigma, \sigma') \left[\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}} U^{(2)}\{\zeta^{(1)}(\sigma')\} + \overline{M} Q_1(\sigma') \zeta^{(1)}(\sigma')\right] d\sigma'. \tag{51}$$

Wir setzen jetzt in die Gleichung (46) den Ausdruck (47) für ζ ein. Es gilt nun vor allem

$$\int_S \psi u_3\, d\sigma = -\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3} \int_S u_3\, d\sigma = 0 \tag{52}$$

und

$$\int_S \psi(\sigma) u_3(\sigma) H_1(\sigma, \sigma')\, d\sigma' = -\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3} \int_S u_3(\sigma) H_1(\sigma, \sigma')\, d\sigma' = 0. \tag{53}$$

Ferner ist

$$\int_S u_3(\sigma) Q_0(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{54}$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} Q_0(\sigma) &= -\frac{2l^3}{\varkappa M}\left(\mathsf{P} - \frac{3\varkappa M}{2l}\right)_{\zeta=0} \\ &= -\frac{2l^3}{\varkappa M}\left\{\frac{\omega^2}{2}(Y^2 + (l+X)^2) + \frac{\varkappa M}{((l+X)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\varkappa M}{2l}\right\} \\ &= -\frac{2l^3}{\varkappa M}\left\{\left[\frac{\omega^2}{2}(Y^2 + X^2 + l^2) - \frac{3\varkappa M}{2l}\right] + \left[\frac{\varkappa M}{((l+X)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} + \omega^2 Xl\right]\right\} \\ &= -\frac{2l^3}{\varkappa M}\{Q_{01}(\sigma) + Q_{02}(\sigma)\}. \end{aligned} \tag{55}$$

Augenscheinlich ist

$$\int_S u_3(\sigma) Q_{01}(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{56}$$

Wir denken uns jetzt den Ausdruck $Q_{02}(\sigma)$ in eine Reihe nach den aplaceschen Kugelfunktionen entwickelt. Zu dem Integral $\int_S Q_{02}(\sigma)\, u_3(\sigma)\, d\sigma$ ben offenbar nur Glieder erster Ordnung einen Beitrag. Wir haben inssen die Winkelgeschwindigkeit ω so gewählt, daß diese Glieder verhwinden. Also ist

7) $$\int_S Q_{02}(\sigma)\, u_3(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

mnach auch, wie behauptet,

8) $$\int_S Q_0(\sigma)\, u_3(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

e Verzweigungsgleichung nimmt darum die Gestalt an:

9) $$0 = \frac{3}{4\pi\tau}\int_S u_3(\sigma)\, U^{(2)}\{\zeta^{(1)}(\sigma)\}\, d\sigma + \overline{M}\int_S u_3(\sigma) Q_1(\sigma)\zeta^{(1)}(\sigma)\, d\sigma + \ldots$$

e nicht hingeschriebenen Glieder sind vom dritten oder höheren Grade bezug auf r_3 und $\overline{M}$; Glieder ersten Grades fehlen ganz.

Es ist leicht einzusehen, daß in (59) alle Glieder den Faktor $\overline{M}$ haben. i nämlich für einen Augenblick $M = 0$, mithin $\overline{M} = 0$ und somit zugleich $= 0$, $s = 0$. Es handelt sich dann um eine ruhende Kugel, auf die ine äußeren Kräfte wirken. Jede Kugel vom Halbmesser τ in der achbarschaft von T, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, ist eine ösung des Problems[12]); r_3 kann beliebig angenommen werden. Die Verveigungsgleichung wird demnach erfüllt, wenn man $\overline{M} = 0$ setzt und r_3 llkürlich annimmt. Also enthalten in (59) alle Glieder $\overline{M}$ als Faktor.

Den Kernpunkt der ganzen Betrachtung bildet offenbar die Bestimmung s Koeffizienten des Gliedes mit $r_3\overline{M}$ in (59). Die Rechnung läßt sich, e wir gleich sehen werden, noch etwas vereinfachen.

Es gilt

0) $$\overline{M} Q_0(\sigma) = \frac{3}{4\pi\tau\varkappa f}\left(\mathsf{P} - \frac{3\varkappa M}{2l}\right)_{\zeta=0} = \overline{M} t(\sigma) + \overline{M} O\left(\frac{\tau}{l}\right)^{13}),$$

$$t(\sigma) = Z^2 - 3X^2.$$

ir finden ferner

1) $$\overline{M} Q_1(\sigma) = \frac{2\overline{M} t(\sigma)}{\tau} + \overline{M} O\left(\frac{\tau}{l}\right).$$

---

[12]) Man beachte, daß für jede dieser Kugeln $s = r_1 = r_4 = 0$ ist.

[13]) Wir denken uns τ und M festgehalten. Unter $O\left(\frac{\tau}{l}\right)$ wird in Anlehnung an e bekannte Bezeichnungsweise eine Funktion auf S verstanden, die der Ungleichheit

$$O\left(\frac{\tau}{l}\right) < C_0 \frac{\tau}{l} \quad (C_0 \text{ konstant})$$

ügt.

Der Ausdruck

$$L^0(\sigma) = \overline{M} Q_0(\sigma) - \overline{M} \int_S H_1(\sigma, \sigma') Q_0(\sigma') d\sigma' \tag{62}$$

ist die Lösung der linearen Integralgleichung

$$L^0(\sigma) - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}} \int_S N_1(\sigma, \sigma') L^0(\sigma') d\sigma' = \overline{M} Q_0(\sigma) = \overline{M} t(\sigma) + \overline{M} O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right). \tag{63}$$

Setzt man

$$L_*^0(\sigma) - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}} \int_S N_1(\sigma, \sigma') L_*^0(\sigma') d\sigma' = \overline{M} t(\sigma), \tag{64}$$

so gilt augenscheinlich

$$L^0(\sigma) = L_*^0(\sigma) + \overline{M} O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right). \tag{65}$$

Wie in § 1 des dritten Kapitels gezeigt wird, ist

$$L_*^0(\sigma) = \tfrac{5}{2} \overline{M} (Z^2 - 3X^2) + 2\mathfrak{r}^2 \overline{M}. \tag{66}$$

Aus (50), (62), (65) und (66) folgt darum

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)}(\sigma) &= r_3 u_3 + [\tfrac{5}{2} \overline{M} (Z^2 - 3X^2) + 2\mathfrak{r}^2 \overline{M}] + \overline{M} O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) \\ &= \mathfrak{z}(\sigma) + \overline{M} O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{3}{4\pi} \int_S u_3(\sigma)\, U^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}\, d\sigma + 2\overline{M} \int_S u_3(\sigma) t(\sigma) \mathfrak{z}(\sigma) d\sigma. \tag{68}$$

Ist der Koeffizient des Gliedes mit $\overline{M} r_3$ in (68) von Null verschieden, so gilt dies wegen (61) und (67) für alle hinreichend kleinen Werte des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{r}}{l}$ auch für das entsprechende Glied der Verzweigungsgleichung (59).

Wie in § 3 des dritten Kapitels gezeigt wird, hat nun der Ausdruck (68) den Wert

$$-\frac{147}{32\pi} \mathfrak{r} \overline{M} r_3. \tag{69}$$

Die Verzweigungsgleichung (59) läßt sich darum in der Form darstellen:

$$\left[-\frac{147}{32\pi} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right)\right] \overline{M} r_3 + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) \overline{M}^2 + \ldots = 0, \tag{70}$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder in bezug auf $\overline{M}$ und r_3 von drittem oder höherem Grade sind. Die Gleichung (70) ergibt nach Kürzung mit $\overline{M}$

$$r_3 = O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) \overline{M} + \overline{M}^2 \mathfrak{P}_1(\overline{M}), \tag{71}$$

unter $\mathfrak{P}_1$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten verstanden.

Denken wir uns die Größen $\mathfrak{r}$ und M festgehalten.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, daß ein Wert l_0 existiert, daß es für alle $l > l_0$ eine und nur eine Gleichgewichtsfigur unseres oblems gibt, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist.

Wie in der Abh. II auf S. 270—276 läßt es sich zeigen, daß man f S_1 Systeme Gaußscher Parameter angeben kann derart, daß die kar- sischen Koordinaten der Punkte auf S stetige Ableitungen aller Ordnungen bezug an diese Parameter haben. Es gilt ferner der Satz, daß die ächenschar S_1 in einer Umgebung beliebiger Ordnung von S enthalten ist.

Aus (45), (50), (37), (67) und (71) folgt

$$2) \qquad \zeta(\sigma) = \tfrac{5}{2}\overline{M}(Z^2 - 3X^2) + 2\mathfrak{r}^2\overline{M} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right)\overline{M}.$$

§ 4.

Die Gestalt der Gleichgewichtsfigur in einer ersten Näherung.

Der vom Mittelpunkt der Kugel S nach dem Punkte ξ, η, ζ gezogene adius-Vektor hat die Länge

$$3) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{r} + \overline{M}\left\{2\mathfrak{r}^2 + \tfrac{5}{2}(Z^2 - 3X^2)\right\} + \overline{M}O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) \\ &= \mathfrak{r} + \overline{M}\left\{-\tfrac{11}{2}X^2 + 2Y^2 + \frac{9Z^2}{2}\right\} + \overline{M}O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right). \end{aligned}$$

ie man leicht findet, ist

$$4) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}^{-2} = {} & \mathfrak{r}^{-2}\left(1 - \tfrac{11}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right)^{-2}\frac{X^2}{\mathfrak{r}^2} + \mathfrak{r}^{-2}(1 + 2\overline{M}\mathfrak{r})^{-2}\frac{Y^2}{\mathfrak{r}^2} \\ & + \mathfrak{r}^{-2}\left(1 + \tfrac{9}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right)^{-2}\frac{Z^2}{\mathfrak{r}^2} + \overline{M}O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right). \end{aligned}$$

ir führen vorübergehend die Polarkoordinaten $\mathfrak{R}, \theta, \psi$ ein. Es ist dann

$$\frac{X}{\mathfrak{r}} = \sin\theta\cos\psi, \qquad \frac{Y}{\mathfrak{r}} = \sin\theta\sin\psi, \qquad \frac{Z}{\mathfrak{r}} = \cos\theta,$$

$$5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_*^2 + \overline{M}O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \\ \mathfrak{R}_*^{-2} = \left(1 - \tfrac{11}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right)^{-2}\sin^2\theta\cos^2\psi + (1 + 2\overline{M}\mathfrak{r})^{-2}\sin^2\theta\sin^2\psi \\ \qquad\qquad + \left(1 + \tfrac{9}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right)^{-2}\cos^2\theta. \end{cases}$$

e Fläche S^*, deren Gleichung in Polarkoordinaten $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_*$ ist, ist offen- r ein Ellipsoid, dessen Halbachsen die Werte

$$6) \qquad \alpha = \mathfrak{r}\left(1 - \tfrac{11}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right), \qquad \beta = \mathfrak{r}(1 + 2\overline{M}\mathfrak{r}), \qquad \gamma = \mathfrak{r}\left(1 + \tfrac{9}{2}\overline{M}\mathfrak{r}\right)$$

er, wegen

$$\overline{M} = -\frac{3M}{8\pi f l^3 \mathfrak{r}},$$

die Werte

$$(77)\quad \alpha = \mathfrak{r}\left(1 + \frac{33M}{16\pi f l^3}\right), \qquad \beta = \mathfrak{r}\left(1 - \frac{3M}{4\pi f l^3}\right), \qquad \gamma = \mathfrak{r}\left(1 - \frac{27}{16\pi f l^3}\right)$$

haben. Die große Achse ist nach dem Zentralkörper hin, die kleine parallel zur Umdrehungsachse gerichtet. Es gilt

$$(78)\quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = 4.$$

Den gleichen Wert für den Quotienten (78) des Annäherungsellipsoids S^* ergibt die klassische Theorie[14]).

Zweites Kapitel.

Stabilität der Gleichgewichtsfigur.

Wir beweisen jetzt, daß die Gleichgewichtsfigur, deren Existenz in dem vorhergehenden Kapitel dargetan worden ist, *stabil* ist. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Sei J_1 das Trägheitsmoment von T_1 in bezug auf die Rotationsachse. Wir setzen

$$(1)\quad \tilde{M}_1 = \frac{\omega^2 J_1^2}{f\varkappa}.$$

Sei T_2 irgendein von einer Fläche mit stetiger Normale S_2 begrenzter, einfach zusammenhängender Körper in der Nachbarschaft erster Ordnung von T_1. Sein Volumen sei gleich dem Volumen von T_1, sein Schwerpunkt decke sich mit demjenigen von T_1. Das Trägheitsmoment von T_2 in bezug auf die Rotationsachse bezeichnen wir mit J_2, die Entfernung der Volumelemente dv und dv von T_2 mit D. Das Gravitationspotential des Zentralkörpers heiße G. Wir setzen

$$(2)\quad \Lambda_2^* = \frac{\tilde{M}_1}{J_2} - \int_{T_2}\int_{T_2} \frac{dv\,d\bar{v}}{D} - 2\int_{T_2} G\,dv.$$

Die Gleichgewichtsfigur T_1 soll mit Thomson und Tait, Poincaré und Liapounoff stabil heißen, wenn Λ_2^* für $T_2 = T_1$ den kleinsten Wert annimmt[15]).

Sei (ξ_1, η_1) irgendein System Gaußscher Koordinaten auf S_1, (ν_1) die Normale von S_1 in $(\xi_1, \eta_1) = \sigma_1$, positiv nach außen gerichtet, ζ_1 der Abstand des Schnittpunktes von (ν_1) mit S_2 von S_1. Die Lage der Punkte auf S_2 ist durch die krummlinigen Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 bestimmt.

---

[14]) Vgl. z. B. bei Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Paris 1891, 2, S. 115.

[15]) Vgl. die Abh. II, S. 203–204. Die im Text benutzten Bezeichnungen weichen von den an jener Stelle gebrauchten einwenig ab. Für $T_1, T_2, \tilde{M}_1, J_1, J_2, \Lambda_1^*, \Lambda_2^*$ treten dort $T, T_1, \tilde{M}, J, J_1, \Lambda^*, \Lambda_1^*$ ein.

Wir bezeichnen mit $\varkappa f \psi_1$ die Schwerkraft auf S_1, mit R_1 den Abnd des Punktes σ_1 von der Rotationsachse, ϱ_1 den Abstand der Punkte und σ_1' auf S_1. Wir nehmen an, daß auf S_1

$$N_1 = \text{Max}\left(|\zeta_1|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}\right|\right) < \varepsilon_*$$

, unter ε_* eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden. Wie in Abh. II, S. 182—191, 203—204 gezeigt worden ist, ist

$$\Lambda_2^* - \Lambda_1^* = -\int_{S_1} \psi_1 \zeta_1^2 d\sigma_1 - \int_{S_1}\int_{S_1} \frac{1}{\varrho_1} \zeta_1 \zeta_1' d\sigma_1 d\sigma_1' + \frac{\omega^2}{f \varkappa J_1}\left(\int_{S_1} R_1^2 \zeta_1 d\sigma_1\right)^2 + |\Re^*|,$$

$$|\Re^*| < \beta_1 \varepsilon_* \int_{S_1} \zeta_1^2 d\sigma_1,$$

er β_1, wie später unter $\beta_2, \beta_3, \ldots$ positive Konstante verstanden. Wir veisen, daß $\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq 0$ ist, wie auch T_2 beschaffen sei, wenn nur die gangs genannten Bedingungen erfüllt sind. Das Gleichheitszeichen gilt für $T_2 = T_1$.

Betrachten wir die lineare Integralgleichung

$$\psi_1 \zeta_1 + \mu \int_{S_1} \frac{1}{\varrho_1} \zeta_1' d\sigma_1' = 0.$$

e in der Abh. II, S. 151—153 gezeigt worden ist, ist der Kern $\frac{1}{\varrho}$ itiv definit und abgeschlossen. Die Eigenwerte von (6) sind sämtlich itiv. Wir bezeichnen sie, in der üblichen Weise einfach geordnet, $\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots$. Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen heißen $u_1^{(2)}, \ldots$. Es gilt

$$\int_{S_1}\int_{S_1} \frac{1}{\varrho_1} \zeta_1 \zeta_1' d\sigma_1 d\sigma_1' = \sum \frac{1}{\mu_1^{(n)}}\left(\int_{S_1} \psi_1 \zeta_1 u_1^{(n)} d\sigma_1\right)^2,$$

$$\int_{S_1} \psi_1 \zeta_1^2 d\sigma_1 = -\sum\left(\int_{S_1} \psi_1 \zeta_1 u_1^{(n)} d\sigma_1\right)^2.$$

gen

$$\omega^2 = \frac{\varkappa M}{l^3}, \quad R_1^2 = (l + X_1)^2 + Y_1^2, \quad J_1 = \int_{T_1} [(l+x)^2 + y^2]\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{\omega^2}{f \varkappa J_1}\left(\int_{S_1} R_1^2 \zeta_1 d\sigma_1\right)^2 < \beta_2 \frac{r}{l}\left|\int_{S_1} \psi_1 \zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

nehmen $\frac{r}{l} < \varepsilon_*$ an und erhalten aus (4), (7) und (8), wenn wir aus nden, die alsbald ersichtlich werden, die vier ersten Eigenwerte zumenfassen,

$$(11)\qquad \begin{cases} \Lambda_2^* - \Lambda_1^* = \sum_{n=1}^{4}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(n)}}\right)\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(n)}\,d\sigma_1\right)^2 \\ \qquad\qquad + \sum_{n>4}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(n)}}\right)\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(n)}\,d\sigma_1\right)^2 + \mathfrak{R}_1^*, \\ \qquad\qquad |\mathfrak{R}_1^*| < \beta_3\,\varepsilon_*\left|\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2\,d\sigma_1\right|. \end{cases}$$

Neben der Integralgleichung (6) betrachten wir die Integralgleichung

$$(12)\qquad \psi\zeta + \mu\int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' = 0.$$

Ihre Eigenwerte, in der üblichen Weise einfach geordnet, heißen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen (die allgemeinen Kugelfunktionen) $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$. Nach bekannten Sätzen konvergieren $\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots$ für $S_1 \to S$ entsprechend gegen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots$. (Vgl. die Bemerkung am Schluß des § 3 des ersten Kapitels.) Wir fassen ζ_1, $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}, \ldots$ als Ortsfunktionen auf S auf und bezeichnen sie als solche mit $\bar{\zeta}$, $\bar{u}^{(1)}(\sigma)$, $\bar{u}^{(2)}(\sigma), \ldots$; es ist also allgemein $u_1^{(n)}(\sigma_1) = \bar{u}^{(n)}(\sigma)$ [16]). Für $\frac{\mathfrak{r}}{l} \to 0$, mithin $S_1 \to S$ konvergiert $\bar{u}^{(n)}(\sigma)$ gleichmäßig gegen $u^{(n)}(\sigma)$.

Es gilt nun, wie sich zeigen läßt (vgl. die Abh. II, S. 140 — 147 und S. 205 — 214, wo sich ähnliche Betrachtungen finden),

$$(13)\qquad \begin{cases} \psi_1 = -\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \quad \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = 1 + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \quad \mu_1^{(2)} = 1 + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \\ \bar{u}^{(2)}(\sigma) = u^{(2)}(\sigma) + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) = \beta_4\frac{X}{\mathfrak{r}} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \end{cases}$$

darum, wie man leicht sieht,

$$(14)\qquad \left|1-\frac{1}{\mu_1^{(2)}}\right|\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(2)}\,d\sigma_1\right)^2 < \beta_5\frac{\mathfrak{r}}{l}\left|\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2\,d\sigma_1\right|.$$

Analoge Ungleichheiten gelten für die mit $u^{(3)}$ und $u^{(4)}$ behafteten Glieder. Für $\frac{X}{\mathfrak{r}}$ treten hier $\frac{Y}{\mathfrak{r}}$ bzw. $\frac{Z}{\mathfrak{r}}$ ein.

Ferner ist

$$(15)\qquad \begin{cases} \mu_1^{(1)} = \mu^{(1)} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) = \frac{1}{3} + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right), \\ \bar{u}^{(1)}(\sigma) = u^{(1)}(\sigma) + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) = D_1 + O\left(\frac{\mathfrak{r}}{l}\right) \qquad (D_1 \text{ konstant}) \end{cases}$$

[16]) Die zusammengehörigen Punkte σ und σ_1 liegen allemal auf demselben Halbmesser der Kugel S.

$$\begin{cases} \left(1-\frac{1}{\mu_1^{(1)}}\right)\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(1)}dc_1\right)^2 \\ =\left[-2+O\left(\frac{r}{l}\right)\right]\left(\int_{S_1}\zeta_1\left(D_2+O\left(\frac{r}{l}\right)\right)d\sigma_1\right)^2 \quad (D_2 \text{ konstant}). \end{cases}$$

ach Voraussetzung ist das Volumen des Körpers T_2 gleich demjenigen n T_1. Darum ist, wie sich leicht zeigen läßt[7]),

$$|\int_{S_1}\zeta_1 d\sigma_1| < \beta_6\,\varepsilon_*\int_{S_1}|\zeta_1|\,d\sigma_1,$$

thin gewiß

$$\left|1-\frac{1}{\mu_1^{(1)}}\right|\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(1)}d\sigma_1\right)^2 < \beta_7\,\varepsilon_*\left|\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

ir finden somit

$$\begin{cases} \Lambda_2^*-\Lambda_1^* = \sum_{n>4}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(n)}}\right)\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2+\mathfrak{R}_2^*, \\ |\mathfrak{R}_2^*| < \beta_8\,\varepsilon_*\left|\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|. \end{cases}$$

Wegen (8) ist

$$\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1 = -\sum_{n=1}^{4}\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2-\sum_{n>4}\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2.$$

Ferner ist

$$\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(2)}d\sigma_1 = D_3\int_S X\xi\,d\sigma+\int_{S_1}O\left(\frac{r}{l}\right)\zeta_1\,d\sigma_1 \quad (D_3 \text{ konstant}),$$

rum

$$\left(\int_{S_1}\psi_1\zeta_1 u_1^{(2)}d\sigma_1\right)^2 \leqq D_3^2\left(\int_S X\xi\,d\sigma\right)^2+\beta_9\,\varepsilon_*\left|\int_{S_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

Der Schwerpunkt der Flüssigkeitsmasse T_2 deckt sich mit demjenigen n T_1. Das Volumen von T_2 ist gleich dem Volumen von T_1. Das atische Moment des Körpers T_2-T_1 in bezug auf die Ebenen $x=0$, $=0$, $z=0$ ist darum gleich Null. Dies besagt, wie sich zeigen läßt, daß

$$|\int_{S_1}X_1\zeta_1 d\sigma_1| \leqq \beta_{10}\,\varepsilon_*\int_{S_1}|\zeta_1|\,d\sigma_1$$

t[18]). Hieraus folgt, wie man leicht sieht,

$$|\int_S X\xi\,d\sigma| \leqq \beta_{11}\,\varepsilon_*\int_{S_1}|\zeta_1|\,d\sigma_1,$$

[17]) Vgl. Abh. II, S. 186–187, wo sich Formeln für das Volumen T_3-T_1 vorfinden.
[18]) Vgl. Abt. II, S. 196–199, wo sich ähnliche Betrachtungen finden.

darum gewiß

$$(25)\qquad \Big(\int_S X\zeta\, d\sigma\Big)^2 \leqq \beta_{12}\,\varepsilon_*\Big|\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma_1\Big|.$$

Analoge Beziehungen gelten für $\Big(\int_S Y\bar{\zeta}\, d\sigma\Big)^2$, $\Big(\int_S Z\bar{\zeta}\, d\sigma\Big)^2$.

Aus (20) ergibt sich jetzt

$$(26)\qquad \Big|\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma_1\Big| \leqq \sum_{n>4}\Big(\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1\, u_1^{(n)}\, d\sigma_1\Big)^2 + \beta_{13}\,\varepsilon_*\Big|\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma\Big|,$$

mithin

$$(27)\qquad \sum_{n>4}\Big(\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1\, u_1^{(n)}\, d\sigma_1\Big)^2 \geqq \big(1-\beta_{13}\,\varepsilon_*\big)\Big|\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma_1\Big|$$

und endlich wegen (19)

$$(28)\qquad \Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq \Big[\Big(1-\frac{1}{\mu_1^{(5)}}\Big)\big(1-\beta_{13}\,\varepsilon_*\big) - \beta_8\,\varepsilon_*\Big]\Big|\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma_1\Big|.$$

Wir wählen ε_* so klein, daß

$$(29)\qquad \Big(1-\frac{1}{\mu_1^{(5)}}\Big)\big(1-\beta_{13}\,\varepsilon_*\big) - \beta_8\,\varepsilon_* > 0$$

ausfällt. Offenbar ist

$$(30)\qquad \Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $\int_{S_1}\psi_1\,\zeta_1^2\, d\sigma_1 = 0$ d. h. $\zeta_1 \equiv 0$, w. z. b. w

Drittes Kapitel.

Hilfsbetrachtungen.

§ 1.

Einige Formeln aus der Theorie der Kugelfunktionen.

In den weiteren Betrachtungen werden wir uns der Laplaceschen Kugelfunktionen der vier ersten Ordnungen bedienen. Die $2n+1$ Laplacesche Fundamentalfunktionen n-ter Ordnung $Y_n^{(1)}, \ldots, Y_n^{(2n+1)}$ sind linear unabhängige Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$(1)\qquad \zeta - \frac{2n+1}{4\pi\varkappa}\int_S \frac{1}{\varrho}\,\zeta'\, d\sigma' = 0.$$

Es seien $\mathfrak{r}$, θ und $\overline{\varphi}$ die Polarkoordinaten auf der Kugel S. Ein vollständiges System linear unabhängiger Eigenfunktionen von (1) bilden z. B. die folgenden Ausdrücke

$$\mathfrak{M}_n = \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n \qquad (\mu = \cos\theta).$$

$$\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d\mathfrak{M}_n}{d\mu}\cos\overline{\psi}, \qquad \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d\mathfrak{M}_n}{d\mu}\sin\overline{\psi},$$

. . . . . .

$$(\sqrt{1-\mu^2})^n\,\frac{d^n\mathfrak{M}_n}{d\mu^n}\cos n\,\overline{\psi}, \qquad (\sqrt{1-\mu^2})^n\,\frac{d^n\mathfrak{M}_n}{d\mu^n}\sin n\,\overline{\psi}\ [19]).$$

Diese Funktionen gehen nach Multiplikation mit je einem konstanten ktor in die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Kugelfunk-nen über.

$$Y_0^{(1)} = 1,$$

$$Y_1^{(1)} = \frac{X}{r}, \quad Y_1^{(2)} = \frac{Y}{r}, \quad Y_1^{(3)} = \frac{Z}{r},$$

$$^{(1)} = 3\left(\frac{Z}{r}\right)^2 - 1, \quad Y_2^{(2)} = \frac{XY}{r^2}, \quad Y_2^{(3)} = \frac{XZ}{r^2}, \quad Y_2^{(4)} = \frac{YZ}{r^2}, \quad Y_2^{(5)} = 3\left(\frac{X}{r}\right)^2 - 1;$$

$$Y_3^{(1)} = 5\frac{Z^3}{r^3} - 3\frac{Z}{r}, \quad Y_3^{(2)} = \frac{X}{r}\left(5\frac{Z^2}{r^2} - 1\right), \quad Y_3^{(3)} = \frac{Y}{r}\left(5\frac{Z^2}{r^2} - 1\right);$$

$$Y_3^{(4)} = \frac{Z}{r^3}(X^2 - Y^2), \; Y_3^{(5)} = \frac{XYZ}{r^3}, \; Y_3^{(6)} = \frac{X}{r^3}(X^2 - 3Y^2), \; Y_3^{(7)} = \frac{Y}{r^3}(Y^2 - 3X^2).$$

$$^{(1)} = 35\left(\frac{Z}{r}\right)^4 - 30\left(\frac{Z}{r}\right)^2 + 3, \; Y_4^{(2)} = \frac{X}{r}\left\{7\left(\frac{Z}{r}\right)^3 - 3\frac{Z}{r}\right\}, \; Y_4^{(3)} = \frac{Y}{r}\left\{7\left(\frac{Z}{r}\right)^3 - 3\frac{Z}{r}\right\},$$

$$^{(4)} = \left(7\left(\frac{Z}{r}\right)^2 - 1\right)\frac{X^2 - Y^2}{r^2}, \; Y_4^{(5)} = \left(7\left(\frac{Z}{r}\right)^2 - 1\right)\frac{XY}{r^2}, \; Y_4^{(6)} = \frac{ZX}{r^4}(X^2 - 3Y^2),$$

$$^{(7)} = \frac{ZY}{r^4}(Y^2 - 3X^2), \; Y_4^{(8)} = \frac{1}{r^4}(X^4 - 6X^2Y^2 + Y^4), \; Y_4^{(9)} = \frac{1}{r^4}(X^3Y - XY^3).$$

Die im vorstehenden angegebenen Kugelfunktionen sind nicht in der ichen Weise normiert. Dies ist aber für die Anwendungen, die wir Auge haben, auch nicht erforderlich.

Betrachten wir die Integralgleichung

$$\zeta - \frac{3}{4\pi r}\int_S N_1\,\zeta_1'\,d\sigma' = F(\sigma) = \sum{}' c_n Y_n,$$

$$N_1 = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r^3}(XX' + YY' + ZZ'),$$

er $\sum{}' c_n Y_n$ irgendein lineares Aggregat der vorhin angegebenen Kugel-ktionen, in dem $Y_1^{(1)}$, $Y_1^{(2)}$, $Y_1^{(3)}$ fehlen, verstanden. Sie hat eine und eine Lösung. Diese ist, wie man sich am einfachsten durch Ein-zen überzeugt, gleich

[19]) Vgl. z. B. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Paris 1891, 2, 70 und 271.

$$\zeta^* = \sum{}' \frac{2n+1}{2n-2} c_n Y_n = -\frac{1}{2} c_0^1 Y_0^{(1)} + \frac{5}{2}(c_2^{(1)} Y_2^{(1)} + \ldots + c_2^{(5)} Y_2^{(5)})$$
$$(5) \quad + \frac{7}{4}(c_3^{(1)} Y_3^{(1)} + \ldots + c_3^{(7)} Y_3^{(7)}) + \frac{3}{2}(c_4^{(1)} Y_4^{(1)} + \ldots + c_4^{(9)} Y_4^{(9)}).$$

Es sei insbesondere

$$(6) \qquad F(\sigma) = \bar{M}(Z^2 - 3X^2) = \bar{M}\mathfrak{r}^2\left(\frac{Y_2^{(1)}}{3} - Y_2^{(5)} - \frac{2}{3} Y_0^{(1)}\right).$$

Aus (5) folgt

$$(7) \quad \zeta^* = \bar{M}\mathfrak{r}^2\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{Y_2^{(1)}}{3} - \frac{5}{2} Y_2^{(5)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Y_0^{(1)}\right) = \frac{5}{2}\bar{M}(Z^2 - 3X^2) + 2\mathfrak{r}^2 \bar{M}.$$

Es ist dies der Ausdruck, der in I § 3 mit $L_*^0(\sigma)$ bezeichnet wurde.

Sei andererseits

$$(8) \qquad F(\sigma) = 1.$$

Wir finden nach (5)

$$(9) \qquad \zeta^* = F(\sigma) - \int_S H(\sigma, \sigma') F(\sigma') d\sigma' = -\tfrac{1}{2}$$

und darum wegen (8)

$$(10) \qquad \int_S H(\sigma, \sigma') d\sigma' = \tfrac{3}{2}.$$

§ 2.

Bestimmung einiger einfacher Integralausdrücke.

Für spätere Verwendung stellen wir jetzt in einer Tabelle eine Anzahl von Integralausdrücken, die sämtlich über die Kugel S erstreckt sind, zusammen. Sie lassen sich mit Leichtigkeit verifizieren.

$$\int d\sigma = 4\pi\mathfrak{r}^2, \quad \int X d\sigma = 0, \quad \int X^2 d\sigma = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^4, \quad \int XY d\sigma = 0,$$
$$\int X^3 d\sigma = \int X^2 Y d\sigma = \int XYZ d\sigma = 0,$$
$$\int X^4 d\sigma = \frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}^6, \quad \int X^2 Y^2 d\sigma = \frac{4\pi}{15}\mathfrak{r}^6, \quad \int X^3 Y d\sigma = \int XYZ^2 d\sigma = 0,$$
$$(11) \quad \int X^5 d\sigma = \int X^4 Y d\sigma = \int X^3 Y^2 d\sigma = \int X^2 Y^2 Z d\sigma = \int XYZ^3 d\sigma = 0,$$
$$\int X^6 d\sigma = \frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}^8, \quad \int X^4 Y^2 d\sigma = \frac{4\pi}{35}\mathfrak{r}^8, \quad \int X^2 Y^2 Z^2 d\sigma = \frac{4\pi}{105}\mathfrak{r}^8,$$
$$\int X^5 Y d\sigma = \int X^3 Y^3 d\sigma = \int XYZ^4 d\sigma = \int XY^3 Z^3 d\sigma = 0.$$

Hierzu kommen die analogen Ausdrücke, die man erhält, wenn man die Buchstaben X, Y, Z miteinander vertauscht.

Des weiteren spielen die folgenden Integrale eine Rolle.

$$\int \frac{d\sigma'}{\varrho} = 4\pi\mathfrak{r}, \quad \int \frac{X'}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X, \quad \int \frac{X'Y'}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XY,$$

$$\int \frac{X'^2}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}X^2 + \frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3,$$

$$\int \frac{X'^3}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}X^3 + \frac{16\pi}{35}\mathfrak{r}^3 X, \quad \int \frac{X'Z'^2}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}XZ^2 + \frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3 X,$$

$$\int \frac{X'Y'Z}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}XYZ, \quad \int \frac{X'^4}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{9}\mathfrak{r}X^4 + \frac{32\pi}{105}\mathfrak{r}^3 X^2 + \frac{64\pi}{105}\mathfrak{r}^5,$$

$$\int \frac{X'^2 Y'^2}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{9}\mathfrak{r}X^2Y^2 + \frac{16\pi}{315}\mathfrak{r}^3 X^2 + \frac{16\pi}{315}\mathfrak{r}^3 Y^2 + \frac{64\pi}{315}\mathfrak{r}^5,$$

$$\int \frac{X'Y'Z'^2}{\varrho} d\sigma' = \frac{4\pi}{9}\mathfrak{r}XYZ^2 + \frac{16\pi}{315}\mathfrak{r}^3 XY,$$

$$\int \frac{X'Z'^3}{\varrho} d\sigma' + \frac{4\pi}{9}\mathfrak{r}XZ^3 + \frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3 XZ.$$

ch in (12) können die Buchstaben X', Y', Z' und entsprechend X, Y, Z teinander vertauscht werden.

Was den Beweis der Formeln (12) betrifft, so ist hierzu folgendes bemerken. Die drei ersten Formeln besagen weiter nichts, als daß die nktionen 1, X, XY die zu den Eigenwerten $\frac{1}{4\pi\mathfrak{r}}$, $\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}$, $\frac{5}{4\pi\mathfrak{r}}$ gehörigen genfunktionen der Integralgleichung (25) I sind. Betrachten wir jetzt die genfunktion $3\left(\frac{X}{\mathfrak{r}}\right)^2 - 1$. Wegen (3) ist offenbar

$$\int \left[3\left(\frac{X'}{\mathfrak{r}}\right)^2 - 1\right] \frac{d\sigma'}{\varrho} = \frac{4\pi\mathfrak{r}}{5}\left[3\left(\frac{X}{\mathfrak{r}}\right)^2 - 1\right].$$

ernach und aus der ersten der Formeln (12) folgt leicht die vierte rmel. So geht man weiter vor und gewinnt allmählich alle Integral- sdrücke (12).

§ 3.

stimmung einiger im ersten Kapitel benutzter komplizierter Integral- ausdrücke.

Wir gehen jetzt zur Berechnung des Ausdruckes (68) I über und be- nnen mit dem Integral

$$2\overline{M}\int_S u_s(\sigma)\, t(\sigma)\, \chi_3(\sigma)\, d\sigma.$$

an überzeugt sich leicht an Hand der Tabelle (11), daß die Glieder t $\overline{M}^2$ verschwinden, während der Koeffizient des Gliedes mit $r_s\overline{M}$ n Wert

$$(15)\qquad 2\int_S u_3^2(\sigma)\,t(\sigma)\,d\sigma = 2\cdot\frac{9}{16\,\pi^2\,\mathfrak{r}^5}\int_S X^2(Z^2-3X^2)\,d\sigma$$

$$= \frac{9}{8\,\pi^2\,\mathfrak{r}^5}\left(\frac{4\,\pi}{15}\,\mathfrak{r}^6 - 3\cdot\frac{4\,\pi}{5}\,\mathfrak{r}^6\right) = -\frac{9\,\pi}{8\,\pi^2}\cdot\frac{32}{15}\,\mathfrak{r} = -\frac{12}{5\,\pi}\,\mathfrak{r}$$

hat. Es ist demnach

$$(16)\qquad 2\,\overline{M}\int_S u_3(\sigma)\,t(\sigma)\,\mathfrak{z}(\sigma)\,d\sigma = -\frac{12}{5\,\pi}\,\mathfrak{r}\,r_3\,\overline{M} = -\frac{16}{5}\,\mathfrak{r}_3'\,\overline{M}\,\mathfrak{r}^{\frac{7}{2}}\qquad\left(r_3 = \frac{4\,\pi\,\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}}{3}\,\mathfrak{r}_3'\right)$$

Die Bestimmung des Integrals

$$(17)\qquad \frac{3}{4\,\pi}\int_S u_3(\sigma)\,U^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}\,d\sigma = \frac{9}{16\,\pi^2\,\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}}\int_S X\,U^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}\,d\sigma$$

erfordert einen erheblich größeren Aufwand an Rechnung.

Es gilt zunächst

$$(18)\qquad U^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_S \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\sum(a'\zeta'-a\zeta)\left\{A_t'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varrho_{t'}}\right)+\frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial A_t'}{\partial t}\right\}_{t=0} d\sigma'.$$

Wegen (vgl. (11) I)

$$(19)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varrho_t}\right]_{t=0} = -\frac{1}{\varrho^3}\sum(X'-X)(a'\zeta'-a\zeta),\quad [A_t']_{t=0} = A' = \frac{\partial(Y',Z')}{\partial(\xi',\eta')},\ \ldots$$

$$\left[\frac{\partial A_t'}{\partial t}\right]_{t=0} = \frac{\partial(Y';c'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')} - \frac{\partial(Z';b'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}$$

ist

$$U^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_S \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\sum(a'\zeta'-a\zeta)\left\{-\frac{\partial(Y',Z')}{\partial(\xi',\eta')}\frac{1}{\varrho^3}\sum(X'-X)(a'\zeta'-a\zeta\right.$$

$$(20)\qquad \left. + \frac{1}{2}\int_S \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\sum\frac{a'\zeta'-a\zeta}{\varrho}\left\{\frac{\partial(Y';c'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')} - \frac{\partial(Z';b'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}\right\}d\sigma' = U_1^{(2)}(\zeta)+\right.$$

Der Ausdruck (20) ist außerordentlich kompliziert. Es erscheint darum von der größten Wichtigkeit, die Parameter ξ und η so zu wählen, daß die Rechnungen sich nach Möglichkeit vereinfachen.

Wir wählen auf der oberen Halbkugel

$$(21)\qquad \xi = X,\quad \eta = Y,$$

auf der unteren Halbkugel dagegen

$$(22)\qquad \xi = -X,\quad \eta = Y.$$

Man findet dann wegen

$$X'^2+Y'^2+Z'^2=\mathfrak{r}^2,$$

$$A'=\mp\frac{\partial Z'}{\partial X'}=\pm\frac{X'}{Z'},\quad B'=\mp\frac{\partial Z'}{\partial Y'}=\pm\frac{Y'}{Z'},\quad C'=\pm 1,$$

$$\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}=\pm\frac{\mathfrak{r}}{Z'},$$

$$a'=\frac{X'}{\mathfrak{r}},\quad b'=\frac{Y'}{\mathfrak{r}},\quad c'=\frac{Z'}{\mathfrak{r}}$$

In (24) gilt das obere Vorzeichen auf der oberen, das untere auf unteren Halbkugel.

Die soeben getroffene Wahl der Gaußschen Parameter ξ, η erfüllt t die Bedingung, daß $A^2+B^2+C^2$ auf S nicht verschwindet. Bei Berechnung des Integrals (18) muß man darum um den Äquatorkreis Kugel einen schmalen Streifen $\bar{S}$ legen, über $S-\bar{S}$ integrieren und Grenze $\bar{S}\to 0$ übergehen.

Wir finden jetzt nacheinander für alle Punkte der Kugel nach Ausluß des Äquatorkreises

$$\left\{\begin{aligned}
J_1&=\frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\left\{\frac{\partial(Y';c'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}-\frac{\partial(Z';b'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}\right\}\\
&=\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\left\{2X'\zeta'-Z'^2\frac{\partial\zeta'}{\partial X'}+X'Y'\frac{\partial\zeta'}{\partial Y'}-Y'^2\frac{\partial\zeta'}{\partial X'}\right\},\\
J_2&=\frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\left\{\frac{\partial(Z';a'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}-\frac{\partial(X';c'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}\right\}\\
&=\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\left\{-X'^2\frac{\partial\zeta'}{\partial Y'}+Y'\left(2\zeta'+X'\frac{\partial\zeta'}{\partial X'}\right)-Z'^2\frac{\partial\zeta'}{\partial Y'}\right\},\\
J_3&=\frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\left\{\frac{\partial(X';b'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}-\frac{\partial(Y',a'\zeta')}{\partial(\xi',\eta')}\right\}\\
&=\frac{Z'}{\mathfrak{r}^2}\left\{2\zeta'+X'\frac{\partial\zeta'}{\partial X'}+Y'\frac{\partial\zeta'}{\partial Y'}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Für ζ' ist hierin der Ausdruck

$$\vartheta(\sigma')=r_3'X'+\tfrac{5}{2}\overline{M}(Z'^2-3X'^2)$$

uführen. Es gilt

$$\frac{\partial\vartheta(\sigma')}{\partial X'}=r_3'-20\overline{M}X',\quad \frac{\partial\vartheta(\sigma')}{\partial Y'}=-5\overline{M}Y',$$

nach

$$
(28)\quad \begin{cases}
J_1 = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\{2r_3' X'^2 + 5\bar{M}(Z'^2 - 3X'^2)X' + 4\mathfrak{r}^2\bar{M}X' \\
\quad -(Z'^2+Y'^2)(r_3' - 20\bar{M}X') - 5\bar{M}X'Y'^2\} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\{2r_3'X'^2 \\
\quad +5\bar{M}(Z'^2-3X'^2)X' + 4\mathfrak{r}^2\bar{M}X' - (\mathfrak{r}^2 - X'^2)(r_3' - 20\bar{M}X') \\
\quad -5\bar{M}X'Y'^2\}, \\
J_2 = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}Y'\{2r_3'X' + 5\bar{M}(Z'^2 - 3X'^2) + 4\mathfrak{r}^2\bar{M} + r_3'X' \\
\quad -20\bar{M}X'^2 + 5\bar{M}(X'^2+Z'^2)\} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}Y'\{2r_3'X' \\
\quad +5\bar{M}(Z'^2-3X'^2) + 4\mathfrak{r}^2\bar{M} + r_3'X' - 20\bar{M}X'^2 + 5\bar{M}(\mathfrak{r}^2 - Y' \\
J_3 = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}Z'\{2r_3'X' + 5\bar{M}(Z'^2 - 3X'^2) + 4r^2\bar{M} + r_3'X' \\
\quad -20\bar{M}X'^2 - 5\bar{M}Y'^2\},
\end{cases}
$$

und nach einer leichten Umformung

$$
(29)\quad \begin{cases}
U_2^{(3)}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\mathfrak{r}^3}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}[(X'\mathfrak{z}' - X\mathfrak{z})X'\{3r_3X' + 5\bar{M}(Z^2 - 7X'^2) \\
\quad +4\mathfrak{r}^2\bar{M} - 5\bar{M}Y'^2\} + (Y'\mathfrak{z}' - Y\mathfrak{z})Y'\{3r_3'X' + 5\bar{M}(Z'^2 - 7X \\
\quad +4\mathfrak{r}^2\bar{M} - 5\bar{M}Y'^2\} + (Z'\mathfrak{z}' - Z\mathfrak{z})Z'\{3r_3'X' + 5\bar{M}(Z'^2 - 7X \\
\quad +4\mathfrak{r}^2\bar{M} - 5\bar{M}Y'^2\} - \frac{1}{2\mathfrak{r}^3}\int_N \frac{d\sigma'}{\varrho}[(X'\mathfrak{z}' - X\mathfrak{z})(\mathfrak{r}^2 r_3' - 20\bar{M}\mathfrak{r}^2X \\
\quad -5(Y'\mathfrak{z}' - Y\mathfrak{z})\bar{M}\mathfrak{r}^2Y'].
\end{cases}
$$

Wir bestimmen jetzt $U_1^{(2)}(\mathfrak{z})$. Wegen

$$
(30)\qquad \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = a' = \frac{X'}{\mathfrak{r}}, \ldots
$$

ist

$$
(31)\quad \begin{cases}
U_1^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\sum(a'\zeta' - a\zeta)\left\{-a'\frac{\sum(X'-X)(a'\zeta'-a\zeta)}{\varrho^2}\right\} \\
\quad = -\frac{1}{2}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\sum\frac{(X'-X)(a'\zeta'-a\zeta)}{\varrho^2}\sum(a'(a'\zeta'-a\zeta)) \\
\quad = -\frac{1}{2\mathfrak{r}}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\left\{\zeta' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\zeta\right\}\sum\frac{(X'-X)(X'\zeta'-X\zeta)}{\varrho^2}
\end{cases}
$$

Wegen

$$
(32)\qquad \sum(X'-X)(X'\zeta'-X\zeta) = \{\mathfrak{r}^2 - (XX'+YY'+ZZ')\}(\zeta+\zeta')
$$

und

$$
(33)\qquad \varrho^2 = 2\{\mathfrak{r}^2 - (XX'+YY'+ZZ')\}
$$

darum

$$) \qquad U_1^{(2)}(\zeta) = -\frac{1}{4\mathfrak{r}}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}(\zeta+\zeta')\left(\zeta' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\zeta\right).$$

Nunmehr finden wir nach einer leichten Umrechnung

$$^{(2)}(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{4}\int_S \frac{d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')\left(\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right)$$

$$-\frac{1}{2\mathfrak{r}^3}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\{3r_3'X'+5\overline{M}(Z'^2-7X'^2)+4\mathfrak{r}^2\overline{M}-5\overline{M}Y'^2\}\{X'(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})$$

$$+Y'(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})+Z'(Z'\mathfrak{z}'-Z\mathfrak{z})\}-\frac{1}{2\mathfrak{r}^3}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\{(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})$$

$$(\mathfrak{r}^2 r_3'-20\overline{M}\mathfrak{r}^2X')-5(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})\overline{M}\mathfrak{r}^2Y'\} = -\frac{1}{4}\int_S \frac{d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')$$

$$\left(\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right)+\frac{1}{2}\int_S \frac{d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}\left\{\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right\}$$

$$\{3r_3'X'+5\overline{M}(Z'^2-7X'^2)+4\mathfrak{r}^2\overline{M}-5\overline{M}Y'^2\}$$

$$-\frac{1}{2\mathfrak{r}}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\{(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})(r_3'-20\overline{M}X')-5(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})\overline{M}Y'\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int_S \frac{d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}\left\{\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right\}\{r_3'(X+X')$$

$$+\frac{5}{2}\overline{M}(Z'^2-3X'^2+Z^2-3X^2)+4\mathfrak{r}^2\overline{M}-6r_3'X$$

$$-10\overline{M}(Z'^2-7X'^2)-8\mathfrak{r}^2\overline{M}+10\overline{M}Y'^2\}$$

$$-\frac{1}{2\mathfrak{r}}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\{(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})(r_3'-20\overline{M}X')-5(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})\overline{M}Y'\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int_S \frac{d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}\left\{\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right\}$$

$$\{r_3'(X-5X')+\overline{M}(-\tfrac{15}{2}Z'^2+\tfrac{125}{2}X'^2+10Y'^2+\tfrac{5}{2}Z^2-\tfrac{15}{2}X^2-4\mathfrak{r}^2)\}$$

$$-\frac{1}{2\mathfrak{r}}\int_S \frac{d\sigma'}{\varrho}\{(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})(r_3'-20\overline{M}X')-5(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})\overline{M}Y'\},$$

mnach

$$\int_S X\,U^{(2)}(\mathfrak{z})\,d\sigma = -\frac{1}{4}\int_S\int_S \frac{X\,d\sigma\,d\sigma'}{\mathfrak{r}\varrho}\left\{\mathfrak{z}' - \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\mathfrak{z}\right\}$$

$$\{r_3'(X-5X')+\overline{M}(-\tfrac{15}{2}Z'^2+\tfrac{125}{2}X'^2+10Y'^2+\tfrac{5}{2}Z^2-\tfrac{15}{2}X^2-4\mathfrak{r}^2)\}$$

$$-\frac{1}{2\mathfrak{r}}\int_S\int_S \frac{X\,d\sigma\,d\sigma'}{\varrho}\{(X'\mathfrak{z}'-X\mathfrak{z})(r_3'-20\overline{M}X')-5(Y'\mathfrak{z}'-Y\mathfrak{z})\overline{M}Y'\}$$

$$= K + K_1.$$

Man überzeugt sich nun vor allem leicht, daß in K und K_1 nur die mit $\bar{M} r_3'$ multiplizierten Glieder von Null verschieden sein können. Die Koeffizienten aller anderen Glieder sind nämlich von der Form

$$(37) \qquad \text{Const.} \int_S \int_S \frac{1}{\varrho} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma X'^{\alpha'} Y'^{\beta'} Z'^{\gamma'} d\sigma d\sigma',$$

wobei $\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'$ ungerade ist. Den in § 2 zusammengestellten Formeln gemäß hat der Ausdruck (37) den Wert Null.

Es ist demnach [20])

$$K_1 = -\frac{\bar{M} r_3'}{2\mathfrak{r}} \int_S \int_S \frac{X}{\varrho} d\sigma d\sigma' \Big\{ \frac{5}{2} X'(Z'^2 - 3X'^2) + 2\mathfrak{r}^2 X' - \frac{5}{2} X(Z^2 - 3X^2)$$

$$- 2\mathfrak{r}^2 X - 20 X'(X'^2 - X^2) - 5 Y'(Y'X' - YX) \Big\}$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{2\mathfrak{r}} \Big[\int_S \frac{5}{2}(Z'^2 - 3X'^2) X' \cdot \frac{4\pi}{3} \mathfrak{r} X' d\sigma' + \int_S 2\mathfrak{r}^2 X' \cdot \frac{4\pi}{3} \mathfrak{r} X' d\sigma'$$

$$- \frac{5}{2} \int d\sigma' \Big\{ \frac{4\pi}{9} \mathfrak{r} X'^2 Z'^2 + \frac{16\pi}{315} \mathfrak{r}^3 X'^2 + \frac{16\pi}{315} \mathfrak{r}^3 Z'^2 + \frac{64\pi}{315} \mathfrak{r}^5 \Big\}$$

$$+ \frac{15}{2} \int d\sigma' \Big\{ \frac{4\pi}{9} \mathfrak{r} X'^4 + \frac{32\pi}{105} \mathfrak{r}^3 X'^2 + \frac{64\pi}{105} \mathfrak{r}^5 \Big\} - 2\mathfrak{r}^2 \int d\sigma' \Big\{ \frac{4\pi}{5} \mathfrak{r} X'^2 + \frac{16\pi}{15} \mathfrak{r}^3 \Big\}$$

$$- 20 \int X'^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \mathfrak{r} X' d\sigma' + 20 \int X' \Big\{ \frac{4\pi}{7} \mathfrak{r} X'^3 + \frac{16\pi}{35} \mathfrak{r}^3 X' \Big\} d\sigma'$$

$$- 5 \int Y'^2 X' \cdot \frac{4\pi\mathfrak{r}}{3} X' d\sigma' + 5 \int Y' \Big\{ \frac{4\pi}{7} \mathfrak{r} Y' X'^2 + \frac{16\pi}{105} \mathfrak{r}^3 Y' \Big\} d\sigma' \Big]$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{2} \Big[\int X'^4 d\sigma' \Big(-\frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{15}{2} \cdot \frac{4\pi}{9} - 20 \cdot \frac{4\pi}{3} + 20 \cdot \frac{4\pi}{7} \Big)$$

$$+ \int X'^2 Y'^2 d\sigma' \Big(\frac{5}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{4\pi}{9} - 5 \cdot \frac{4\pi}{3} + 5 \cdot \frac{4\pi}{7} \Big) + \mathfrak{r}^2 \int X'^2 d\sigma' \Big(2 \cdot \frac{4\pi}{3}$$

$$- \frac{5}{2} \cdot \frac{16\pi}{315} - \frac{5}{2} \cdot \frac{16\pi}{315} + \frac{15}{2} \cdot \frac{32\pi}{105} - 2 \cdot \frac{4\pi}{5} + 20 \cdot \frac{16\pi}{35} + 5 \cdot \frac{16\pi}{105} \Big)$$

$$+ \mathfrak{r}^4 \int d\sigma' \Big(-\frac{5}{2} \cdot \frac{64\pi}{315} + \frac{15}{2} \cdot \frac{64\pi}{105} - 2 \cdot \frac{16\pi}{15} \Big) \Big] = -\frac{\bar{M} r_3'}{2} \Big[4\pi \int X'^4 d\sigma' \Big(-\frac{5}{2} + \frac{5}{6}$$

$$- \frac{20}{3} + \frac{20}{7} \Big) + 4\pi \int X'^2 Y'^2 d\sigma' \Big(\frac{5}{6} - \frac{5}{18} - \frac{5}{3} + \frac{5}{7} \Big) + 4\pi\mathfrak{r}^2 \int X'^2 d\sigma' \Big(\frac{2}{3} - \frac{2}{63}$$

$$- \frac{2}{63} + \frac{4}{7} - \frac{2}{5} + \frac{16}{7} + \frac{4}{21} \Big) + 32\pi\mathfrak{r}^4 \int d\sigma' \Big(-\frac{1}{63} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} \Big) \Big]$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{2} \Big[4\pi \cdot \frac{4\pi}{5} \mathfrak{r}^6 \cdot \frac{-105+35-280+120}{42} + 4\pi \cdot \frac{4\pi}{15} \mathfrak{r}^6 \cdot \frac{105-35-210+90}{126}$$

$$+ 4\pi\mathfrak{r}^2 \cdot \frac{4\pi}{3} \mathfrak{r}^4 \cdot \frac{210-10-10+180-126+720+60}{315} + 32\pi\mathfrak{r}^4 \cdot 4\pi\mathfrak{r}^2 \cdot \frac{-5+45-21}{315} \Big]$$

[20]) Man vergleiche die Formeln (11) und (12) und beachte, daß $\int X'^2 Z'^2 d\sigma' = \int X'^2 Y'^2 d\sigma'$ und dergleichen gilt.

$$= -\frac{\pi^2 \bar{M} r_3' \mathfrak{r}^6}{2}\left[\frac{16}{5}\cdot\frac{-230}{42}+\frac{16}{15}\cdot\frac{-50}{126}+\frac{16}{3}\cdot\frac{1024}{315}+128\cdot\frac{19}{315}\right]$$

$$= -\pi^2 \bar{M} r_3' \frac{\mathfrak{r}^6}{2}\cdot\left[-\frac{368}{21}-\frac{80}{189}+\frac{16384}{945}+\frac{2432}{315}\right]$$

$$= -\pi^2 \bar{M} r_3' \frac{\mathfrak{r}^6}{2}\cdot\left[\frac{-16560-400+16384+7296}{945}\right] = -\pi^2 \bar{M} r_3' \frac{\mathfrak{r}^6}{2}\cdot\frac{6720}{945}$$

$$= -\frac{32}{9}\pi^2 \bar{M} r_3' \mathfrak{r}^6.$$

Wir finden weiter

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\int\int\frac{X}{\varrho}(X-5X')\left\{\frac{5}{2}(Z'^2-3X'^2)+2\mathfrak{r}^2\right.$$

$$\left.-\frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\left[\frac{5}{2}(Z^2-3X^2)+2\mathfrak{r}^2\right]\right\}d\sigma\,d\sigma' - \frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\int\int\frac{X}{\varrho}\left(-\frac{15}{2}Z'^2\right.$$

$$\left.+\frac{125}{2}X'^2+10Y'^2+\frac{5}{2}Z^2-\frac{15}{2}X^2-4\mathfrak{r}^2\right)\left\{X'-\frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}X\right\}d\sigma\,d\sigma'$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\int\int\frac{d\sigma\,d\sigma'}{\varrho}\left[\frac{5}{2}X^2Z'^2\right.$$

$$-\frac{15}{2}X^2X'^2-\frac{25}{2}XX'Z'^2+\frac{75}{2}XX'^3+2\mathfrak{r}^2X^2-10\mathfrak{r}^2XX'-\frac{15}{2}XX'Z'^2$$

$$\left.+\frac{125}{2}XX'^3+10XX'Y'^2+\frac{5}{2}XX'Z^2-\frac{15}{2}X^3X'-4\mathfrak{r}^2XX'\right]$$

$$+\frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\int\int\frac{d\sigma\,d\sigma'}{\varrho}\cdot\frac{XX'+YY'+ZZ'}{\mathfrak{r}^2}\cdot\left(\frac{5}{2}X^2Z^2-\frac{15}{2}X^4-\frac{25}{2}XX'Z^2\right.$$

$$+\frac{75}{2}X^3X'+2\mathfrak{r}^2X^2-10\mathfrak{r}^2XX'-\frac{15}{2}X^2Z'^2+\frac{125}{2}X^2X'^2+10X^2Y'^2$$

$$\left.+\frac{5}{2}X^2Z^2-\frac{15}{2}X^4-4\mathfrak{r}^2X^2\right) = K_2+K_3,$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\left[\int\frac{5}{2}Z'^2\cdot\left(\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}X'^2+\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\right)d\sigma'-\frac{15}{2}\int X'^2\left(\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}X'^2+\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\right)d\sigma'\right.$$

$$-\frac{25}{2}\int X'Z'^2\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'+\frac{75}{2}\int X'^3\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'+2\mathfrak{r}^2\int\left(\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}X'^2\right.$$

$$\left.-\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\right)d\sigma'-10\mathfrak{r}^2\int X'\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'-\frac{15}{2}\int X'Z'^2\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'$$

$$-\frac{125}{2}\int X'^3\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'+10\int X'Y'^2\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'+\frac{5}{2}\int X'Z'^2\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'$$

$$\left.-\frac{15}{2}\int X'^3\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'-4\mathfrak{r}^2\int X'\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}X'\,d\sigma'\right] = -\frac{\bar{M} r_3'}{4\mathfrak{r}}\left[\pi\mathfrak{r}\int X'^4\,d\sigma'\left(-6\right.\right.$$

$$\left.-50+\frac{250}{3}-10\right)+\pi\mathfrak{r}\int X'^2Z'^2\,d\sigma'\left(2-\frac{50}{3}-10+\frac{40}{3}+\frac{10}{3}\right)$$

$$\left.-\pi\mathfrak{r}^3\int X'^2\,d\sigma'\left(\frac{8}{3}-8+\frac{8}{5}-\frac{40}{3}-\frac{16}{3}\right)+\pi\mathfrak{r}^5\int d\sigma'\cdot\frac{32}{15}\right]$$

$$= -\frac{\bar{M} r_3'\pi}{4}\left[\int X'^4\,d\sigma'\cdot\frac{352}{3}-8\int X'^2Z'^2\,d\sigma'-\mathfrak{r}^2\int X'^2\,d\sigma'\cdot\frac{112}{5}+\frac{32}{15}\mathfrak{r}^4\int d\sigma'\right]$$

$$= -\frac{\bar{M}r_3'\pi}{4}\left[\frac{352}{3}\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}^6 - 8\cdot\frac{4\pi}{15}\mathfrak{r}^6 - \frac{112}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^6 + \frac{32}{15}\cdot 4\pi\mathfrak{r}^6\right]$$

$$= -\frac{\bar{M}r_3'\pi^2}{4}\mathfrak{r}^6\left[\frac{1408-32-448+128}{15}\right] = -\frac{\bar{M}r_3'\pi^2}{4}\mathfrak{r}^6\cdot\frac{1056}{15} = -\frac{88}{\ }\bar{M}r_3'\pi^2\mathfrak{r}^6$$

Endlich ist

$$K_3 = \frac{\bar{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\int\int\frac{d\sigma\,d\sigma'}{\varrho}(XX'+YY'+ZZ')\Big(5X^2Z^2-15X^4-2\mathfrak{r}^2X^2$$

$$-\frac{25}{2}XX'Z^2+\frac{75}{2}X^3X'-10\mathfrak{r}^2XX'-\frac{15}{2}X^2Z'^2+\frac{125}{2}X^2X'^2+10X^2Y'^2$$

$$= \frac{\bar{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\int\int\frac{d\sigma\,d\sigma'}{\varrho}\Big\{5X^3Z^2X'-15X^5X'-2\mathfrak{r}^2X^3X'-\frac{25}{2}X^2X'^2Z^2$$

$$+\frac{75}{2}X^4X'^2-10\mathfrak{r}^2X^2X'^2-\frac{15}{2}X^3X'Z'^2+\frac{125}{2}X^3X'^3+10X^3Y'^2X'$$

$$+5X^2Z^3YY'-15X^4YY'-2\mathfrak{r}^2X^2YY'-\frac{25}{2}XX'YY'Z^2+\frac{75}{2}X^3X'YY'$$

$$-10\mathfrak{r}^2XX'YY'-\frac{15}{2}X^2Z'^2YY'+\frac{125}{2}X^2X'^2YY'+10X^2YY'^3$$

$$+5X^2Z^3Z'-15X^4ZZ'-2\mathfrak{r}^2X^2ZZ'-\frac{25}{2}XX'Z^3Z'+\frac{75}{2}X^3X'ZZ'$$

$$-10\mathfrak{r}^2XX'ZZ'-\frac{15}{2}X^2ZZ'^3+\frac{125}{2}X^2X'^2ZZ'+10X^2Y'^2ZZ'\Big\}$$

$$= \frac{\bar{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\Big[5\int X^3Z^2\cdot\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3}X\,d\sigma-15\int X^5\cdot\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3}X\,d\sigma-2\mathfrak{r}^2\int X^3\cdot\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3}X\,d\sigma$$

$$-\frac{25}{2}\int X^2Z^2\Big(\frac{4\pi\mathfrak{r}}{5}X^2+\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\Big)d\sigma+\frac{75}{2}\int X^4\Big(\frac{4\pi\mathfrak{r}}{5}X^2+\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\Big)d\sigma$$

$$-10\mathfrak{r}^2\int X^2\Big(\frac{4\pi\mathfrak{r}}{5}X^2+\frac{16\pi}{15}\mathfrak{r}^3\Big)d\sigma-\frac{15}{2}\int X^3\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}XZ^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3X\Big)d\sigma$$

$$+\frac{125}{2}\int X^3\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}X^3+\frac{16\pi}{35}\mathfrak{r}^3X\Big)d\sigma+10\int X^3\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}XY^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3X\Big)d\sigma$$

$$+5\int X^2Z^2Y\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Y\,d\sigma-15\int X^4Y\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Y\,d\sigma-2\mathfrak{r}^2\int X^2Y\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Y\,d\sigma$$

$$-\frac{25}{2}\int XYZ^2\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XY\,d\sigma+\frac{75}{2}\int X^3Y\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XY\,d\sigma$$

$$-10\mathfrak{r}^2\int XY\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XY\,d\sigma-\frac{15}{2}\int X^2Y\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}YZ^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3Y\Big)d\sigma$$

$$+\frac{125}{2}\int X^2Y\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}YX^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3Y\Big)d\sigma+10\int X^2Y\Big(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}Y^3+\frac{16\pi}{35}\mathfrak{r}^3Y\Big)d\sigma$$

$$+5\int X^2Z^3\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Z\,d\sigma-15\int X^4Z\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Z\,d\sigma-2\mathfrak{r}^2\int X^2Z\cdot\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}Z\,d\sigma$$

$$-\frac{25}{2}\int XZ^3\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XZ\,d\sigma+\frac{75}{2}\int X^3Z\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XZ\,d\sigma$$

$$-10\mathfrak{r}^2\int XZ\cdot\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}XZ\,d\sigma-\frac{15}{2}\int X^2Z\left(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}Z^3+\frac{16\pi}{35}\mathfrak{r}^3Z\right)d\sigma$$

$$+\frac{125}{2}\int X^2Z\left(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}ZX^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3Z\right)d\sigma+10\int X^2Z\left(\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}ZY^2+\frac{16\pi}{105}\mathfrak{r}^3Z\right)d\sigma\Big]$$

$$=\frac{\overline{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\Big[\pi\mathfrak{r}\int X^6d\sigma\left(-20+30+\frac{250}{7}\right)+\pi\mathfrak{r}\int X^4Y^2d\sigma\left(\frac{20}{3}-10-\frac{30}{7}\right.$$

$$\left.+\frac{40}{7}-20+30+\frac{40}{7}+\frac{20}{3}-20-10+30-\frac{30}{7}+\frac{250}{7}+\frac{250}{7}\right)$$

$$+\pi\mathfrak{r}\int X^2Y^2Z^2d\sigma\left(\frac{20}{3}-10-\frac{30}{7}+\frac{40}{7}\right)+\pi\mathfrak{r}^3\int X^4d\sigma\left(-\frac{8}{3}+40-8\right.$$

$$\left.-\frac{8}{7}+\frac{200}{7}+\frac{32}{21}\right)+\pi\mathfrak{r}^3\int X^2Y^2d\sigma\left(-\frac{40}{3}-\frac{8}{3}-8-\frac{8}{7}+\frac{200}{21}+\frac{32}{7}-\frac{8}{3}\right.$$

$$\left.-8-\frac{24}{7}+\frac{200}{21}+\frac{32}{21}\right)+\pi\mathfrak{r}^5\int X^2d\sigma\cdot-\frac{32}{3}\Big]$$

$$=\frac{\pi\overline{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\Big[\int X^6d\sigma\cdot\frac{320}{7}+\int X^4Y^2d\sigma\cdot\frac{1840}{21}-\int X^2Y^2Z^2d\sigma\cdot\frac{40}{21}$$

$$+\mathfrak{r}^2\int X^4d\sigma\cdot\frac{408}{7}-\mathfrak{r}^2\int X^2Y^2d\sigma\cdot\frac{296}{21}-\mathfrak{r}^4\int X^2d\sigma\cdot\frac{32}{3}\Big]$$

$$=\frac{\pi\overline{M}r_3'}{4\mathfrak{r}^3}\left[\frac{4\pi}{7}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{320}{7}+\frac{4\pi}{35}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{1840}{21}-\frac{4\pi}{105}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{40}{21}+\frac{4\pi}{5}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{408}{7}-\frac{4\pi}{15}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{296}{21}\right.$$

$$\left.-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^8\cdot\frac{32}{3}\right]=\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\left[\frac{14400+5520-40+25704-2072-7840}{49\times45}\right]$$

$$=\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\cdot\frac{35672}{49\times45}=\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\cdot\frac{728}{45}.$$

Alles in allem ist also

$$\int XU^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}d\sigma=\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\left(-\frac{32}{9}-\frac{88}{5}+\frac{728}{45}\right)$$

$$=\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\cdot\frac{-160-802+728}{45}=-\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6\cdot\frac{234}{45}=-\frac{26}{5}\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6,$$

nnach mit Rücksicht auf (17)

$$)\ \frac{3}{4\pi}\int u_3(\sigma)U^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}d\sigma=-\frac{9}{16\pi^2\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{26}{5}\pi^2\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^6=-\frac{117}{40}\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^{\frac{7}{2}}.$$

Aus (16) und (38) folgt endlich

$$\frac{3}{4\pi}\int u_3(\sigma)U^{(2)}\{\mathfrak{z}(\sigma)\}d\sigma+2\overline{M}\int u_3(\sigma)t(\sigma)\mathfrak{z}(\sigma)d\sigma=\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^{\frac{7}{2}}\left(-\frac{16}{5}-\frac{117}{40}\right)$$

$$=-\frac{245}{40}\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^{\frac{7}{2}}=-\frac{49}{8}\overline{M}r_3'\mathfrak{r}^{\frac{7}{2}}=-\frac{147}{32\pi}\overline{M}r_3\mathfrak{r}.$$

Berlin, den 8. April 1920.

(Eingegangen am 8. April 1920.)

Über affine Geometrie XXX: Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie.

Von

Ludwig Berwald in Prag.

Die Flächen zweiter Ordnung, die eine gegebene krumme, nicht abwickelbare Fläche in einem regulären Punkte oskulieren, haben bisher vornehmlich in der projektiven Flächentheorie einige Anwendung gefunden. Im folgenden wird gezeigt, daß sich mit ihrer Hilfe auch die wichtigsten Begriffe der Affingeometrie der Flächen, wie sie von den Herren G. Pick[1], W. Blaschke[2] und J. Radon[3] entwickelt worden ist, in sehr einfacher Weise erklären lassen.

Das gilt insbesondere von den Affinnormalen der Fläche, von der Affininvariante J, deren identisches Verschwinden die Regelflächen charakterisiert [Nr. 4]; dann aber auch von gewissen inhaltstreu-affinen Maßbegriffen: der Affinentfernung eines Punktes vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung [Nr. 5] und der Affinentfernung zweier Punkte auf einer Tangente der Fläche [Nr. 6]. Endlich wird auch für zwei Begriffe, welche der projektiven und der affinen Flächentheorie gleichmäßig angehören, nämlich für die „tangentes d'osculation quadrique" von G. Darboux (vgl. [10]) und die zu ihnen konjugierten „Tangenten" von Segre" (vgl. [13a]) je eine geometrische Definition gegeben [Nr. 4].

---

[1]) G. Pick, Über affine Geometrie IV: Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 107—136 („A. G. IV.").

[2]) W. Blaschke. a) Über affine Geometrie V: Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 166—206 („A. G. V."). b) Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 13—37 („A. G. XII.").

[3]) J. Radon, Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 91—107 („A. G. XVI.").

Bemerkenswert ist es, daß alle genannten Begriffe sich — zum Teil ar auf verschiedene Arten — mit Hilfe der oskulierenden Flächen iter Ordnung *allein* erklären lassen, ohne daß man es nötig hatte, andersartigen Elementen Gebrauch zu machen. Das gilt auch noch der affinen Krümmungstheorie (auf die in der folgenden Abhandlung it weiter eingegangen wird): denn diese basiert nur auf den projektiven enschaften der Kongruenz der Affinnormalen und auf dem Begriffe der nentfernung eines Punktes vom Flächenelement zweiter Ordnung.

Der eben erwähnte prinzipielle Standpunkt ist wenigstens in einer lußbemerkung [Nr. 7] zur Geltung gebracht worden. Im übrigen habe es vorgezogen, die Darstellung möglichst an die bereits vorliegenden eiten, insbesondere an die grundlegende Abhandlung[3]) des Herrn adon anzuschließen [Nr. 1—3]. Dabei wurde auch je eine geometrische lärung des Affinbogenelements und der Affinnormalen mit aufgenommen, zum Thema in keiner Beziehung stehen [Nr. 1].

1. Affinbogenelement und Affinnormale. — Wir betrachten ein reelles läres Flächenstück ohne parabolische Punkte[4]), das auf allgemeine ameter u, v bezogen ist.

Man erklärt dann, nach G. Pick[1]), W. Blaschke[2a]) und J. Radon[3]), *quadriertes Affinbogenelement* $d\sigma^2$ der Fläche im Punkte P von den rdinaten $x_i = x_i(u, v)$, $(i = 1, 2, 3)$ die quadratische Differentialform:

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{\sqrt[4]{\varepsilon(LN - M^2)}}. \tag{1}$$

Hierin ist, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise[5]):

$$L = (x_{uu}\,x_u\,x_v), \qquad M = (x_{uv}\,x_u\,x_v), \qquad N = (x_{vv}\,x_u\,x_v)$$

tzt und $\varepsilon = +1$ oder -1 zu nehmen, je nachdem das Flächenstück tische ($LN - M^2 > 0$) oder hyperbolische ($LN - M^2 < 0$) Krümmung Wir setzen ferner, mit Herrn J. Radon[3]), fest, daß die in (1) auf ende Wurzel stets *positiv* gezogen werden soll. Dadurch wird das henstück *orientiert*, d. h. $d\sigma^2$ wechselt bei einer Parametertransfor- ion mit negativer Transformationsdeterminante das Vorzeichen[6]). Die

[4]) Wir sagen dafür weiterhin in der Regel einfach „Fläche". Ebenso ist immer kt" gleich eigentlicher Punkt, und, wo sich nicht aus dem Zusammenhange das nteil ergibt, gleich reeller eigentlicher Punkt.

[5]) $(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ usw. x bezeichnet dabei Vektor des Punktes von den Koordinaten x_1, x_2, x_3.

[6]) Nr. 1—6 bezieht sich daher durchaus auf Parametersysteme, die aus einem gewählten durch „eigentliche" Parametertransformation (Determinante positiv) rgehen.

Differentialform (1) ist jetzt im Falle elliptischer Krümmung der Fläch definit, im Falle hyperbolischer Krümmung indefinit.

Weiter bezeichnen wir als Affinnormalvektor x^* der Fläche[7]) in Punkte P den Vektor

$$x^* = -\tilde{x} = \frac{1}{2}\Delta_2 x, \tag{3}$$

wenn Δ_2 der zweite Beltramische Differentialparameter der quadratische Differentialform (1) ist. Die Gerade durch P parallel zum Vektor (3 heißt die *Affinnormale*[8]) der Fläche im Punkte P; den Punkt, desse Vektor $x + x^*$ ist, nennen wir den *Einheitspunkt* der Affinnormalen, d Ebene durch diesen Einheitspunkt parallel zur Tangentenebene der Fläch in P die *Einheitsebene*. Der Affinnormalvektor liegt nicht in der Tan gentenebene der Fläche. Es besteht vielmehr die Identität:

$$(x^* x_u x_v) = \sqrt[4]{\varepsilon(LN - M^2)} = \sqrt{\varepsilon(eg - f^2)}. \tag{4}$$

Die zweite in (4) auftretende Wurzel ist dabei durch die erste erklärt.

Das Affinbogenelement gestattet die folgende geometrische Erklärung die freilich nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen reell ausfällt:

Man betrachte auf der Fläche zwei Nachbarpunkte $P(u, v)$ und $P'(u + du, v + dv)$, und lege durch jeden von ihnen die beiden Asymptotenlinien. Die Asymptotenlinie der einen (anderen) Schar[9]) *durch P schneide die der zweiten (ersten) Schar durch P' in einem Punkte P'' (P'''). Dann ist die achte Potenz des Affinbogenelementes PP', abgesehen von infinitesimalen Größen neunter und höherer Ordnung, gleich dem quadrierten Inhalt des Tetraeders $PP'P''P'''$, multipliziert mit $-3^2 \cdot 2^6 \cdot \varepsilon$.*

Auf das Tetraeder $PP'P''P'''$ läßt sich auch eine anscheinend neue Definition der Affinnormalen gründen:

Bezeichnet S den Schwerpunkt der vier (mit gleichen Massen belegten) Punkte P, P', P'', P''', und H den Schwerpunkt von P'' und P''', so geht die Gerade HS, wenn man den Punkt P' in den Punkt P hineinrücken läßt, in der Grenze in die Affinnormale der Fläche im Punkte P über[9a]).

---

[7]) Vgl. W. Blaschke, A. G. V., S. 181, wo zuerst der Vektor x^* eingeführt wird und A. G. XII., S. 20.

[8]) Vgl. z. B. G. Pick, A. G. IV., S. 127 ff.

[9]) Die beiden Scharen von Asymptotenlinien werden nicht als in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt gedacht. Deshalb tritt weiter unten das Quadrat des Tetraederinhaltes auf, nicht dieser selbst.

[9a]) An Stelle des Punktes S kann man in der obigen Definition der Affinnormalen natürlich auch den Schwerpunkt H' von P und P' benutzen; eine Bemerkung, die ich Herrn G. Pick verdanke.

Vorausgesetzt ist dabei, daß das Element PP' keiner Asymptoten-ie der Fläche angehört.

2. Die kubische Fundamentalform. — Die affine Flächentheorie läßt n auffassen als Theorie der simultanen invarianten Bildungen der qua-tischen Differentialform (1) und einer kubischen Differentialform, die rst von Herrn G. Pick[1]) eingeführt worden ist. Wir erklären diese ubische Fundamentalform"

$$\psi = A\,du^3 + 3B\,du^2\,dv + 3C\,du\,dv^2 + D\,dv^3$$

t Herrn J. Radon[2]) durch:

$$\psi = \frac{(d^3x\,x_u\,x_v)}{\sqrt[4]{\varepsilon(LN-M^2)}} - \frac{3}{2}d(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2).$$

ist zur Differentialform (1) apolar:

$$\begin{cases} Ag - 2Bf + Ce = 0, \\ Bg - 2Cf + De = 0. \end{cases}$$

her besitzen $d\sigma^2$ und ψ nur eine absolute Invariante:

$$J = \frac{1}{(eg-f^2)^2}\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ e & f & g \end{vmatrix} = \frac{2}{e}\frac{AC-B^2}{eg-f^2} = \frac{1}{f}\frac{AD-BC}{eg-f^2} = \frac{2}{g}\frac{BD-C^2}{eg-f^2}.$$

gen der Apolarität ist ferner die Diskriminante R von ψ durch:

$$R = J^2(eg-f^2)^3$$

eben.

Wenn im betrachteten Punkte P der Fläche $J \neq 0$ ist, so definiert Gleichung $\psi = 0$ drei getrennte, von P ausgehende, mit der Fläche *jektiv*-kovariant verbundene Tangenten der Fläche, die als „tangentes sculation quadrique" zuerst bei G. Darboux[10]) auftreten und deshalb *Tangenten von Darboux* heißen sollen. Sie fallen dann und nur n zusammen, und zwar in eine Asymptote der Fläche im Punkte P, nn dort $J = 0$ ist und ψ nicht in P identisch verschwindet. Diese mptote besitzt dann, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist, eine mehr dreipunktige Berührung mit der Fläche. Wenn ψ an der Stelle P ntisch verschwindet, so werden die Tangenten von Darboux unbestimmt, beide Asymptoten der Fläche berühren diese dort mehr als drei-ktig. J ist also beständig Null für die Regelflächen (und nur für sie), benso für die Flächen zweiter Ordnung, wie übrigens bekannt ist.

[10]) G. Darboux, Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. (2) 4 (1880), S. 348—384, auf S. 357f. — Eine affin-invariante Erklärung hat f. gegeben: L. Berwald, Über affine Geometrie XXVII. Liesche F_2, Affinnormale mittlere Affinkrümmung. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 63—78, insbes. S. 68.

3. Kanonische Entwicklung der Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte. — Herr G. Pick[11]) hat die folgenden, gegenüber inhaltstreuen Affinitäten kanonischen Entwicklungen einer Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte P angegeben:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{(a)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \frac{K}{6}(x_1^3 - 3\varepsilon x_1 x_2^2) + [4] + \dots, \\ \text{(b)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{6}(x_1 + x_2)^3 + [4] + \dots, \\ \text{(c)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \quad * \quad + [4] + \dots{}^{12}) \end{cases}$$

($\varepsilon^2 = 1$, $K = \text{const} \neq 0$). Durch [4] sind in (9) die Glieder vierter Ordnung angedeutet. (9c) entsteht aus (9a) für $K = 0$. Die erste (zweite, dritte) der Entwicklungen (9) gilt in der Umgebung eines Flächenpunktes, in dem keine (eine, jede) Asymptote der Fläche mit ihr eine mehr als dreipunktige Berührung hat. In sämtlichen Entwicklungen (9) ist der Punkt P, dessen Umgebung betrachtet wird, Anfangspunkt des (Parallel-)Koordinatensystems x_1, x_2, x_3, die zugehörige Tangentenebene der Fläche $x_1 x_2$-Ebene. Endlich hat die Größe ε, hier und weiterhin, die in Nr. 1 festgesetzte Bedeutung.

Wenn die Fläche in einer der kanonischen Entwicklungen vorliegt, so nehmen die in Nr. 1 und 2 eingeführten Größen im Punkte P folgende Werte an:

$$(1^*) \qquad d\sigma^2 = dx_1^2 + \varepsilon dx_2^2,$$

$$(5a^*)\quad \psi = -\frac{K}{2}(dx_1^3 - 3\varepsilon dx_1 dx_2^2), \qquad (5b^*)\quad \psi = -\frac{1}{2}(dx_1 + dx_2)^3,$$

$$(5c^*)\quad \psi = 0$$

und

$$(7a^*)\quad J = -\frac{1}{2}K^2, \qquad (7b, c^*)\quad J = 0.$$

Dabei bedeuten die Zeiger a, b, c bei den Nummern der Formeln, daß die betreffende Gleichung beziehungsweise für die Entwicklung (9a), (9b) oder (9c) gilt.

4. Erklärung der Tangenten von Darboux und Segre, der Affinnormalen und der Affininvariante J mittels der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung. — Wir führen nunmehr die ∞^3 unsere Fläche im betrachteten Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung ein, d. h. diejenigen, deren Schnittkurve mit der Fläche dort einen (mindestens)

[11]) A. G. IV, S. 124 ff.

[12]) Hier ist a. a. O.[11]) der Fall (c) mit $\varepsilon = 1$, der bei den elliptisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung (ohne singulären Punkt) an jeder Stelle besteht, nicht ausdrücklich angeführt.

ifachen Punkt hat. Die Gleichung einer beliebigen unter ihnen lautet, jede der Entwicklungen (9):

$$2x_3 = x_1^2 + \varepsilon x_2^2 - 2c_1 x_1 x_3 - 2c_2 x_2 x_3 + c_3 x_3^2 ,$$

c_1, c_2, c_3 willkürliche Konstanten bedeuten Der Mittelpunkt der iche (10) hat, wofern er eigentlich ist $(c_3 + c_1^2 + c_2^2 \cdot \varepsilon)$, die Koorditen:

$$m_1 = \frac{c_1}{c_3 - c_1^2 - c_2^2 \varepsilon}, \qquad m_2 = \frac{c_2 \varepsilon}{c_3 - c_1^2 - c_2^2 \varepsilon}, \qquad m_3 = \frac{1}{c_3 - c_1^2 - c_2^2 \varepsilon},$$

absolut genommenes quadriertes Halbachsenprodukt[13]) den Wert:

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{1}{(c_3 - c_1^2 - c_2^2 \varepsilon)^4} = m_3^4 .$$

(11) besagt u. a., daß die Gerade, welche den Mittelpunkt einer in oskulierenden Fläche zweiter Ordnung mit P verbindet, nur von den rhältnissen $c_1 : c_2 \varepsilon : 1$, nicht aber von der Konstanten c_3 abhängt. —

Bereits G. Darboux[10]) hat die oskulierenden Flächen zweiter Ordng zur Definition der „tangentes d'osculation quadrique" herangezogen. r geben hier für die Tangenten von Darboux eine andere, anscheinend ch nirgends ausdrücklich ausgesprochene[13a]), projektiv-invariante Erklärg, an die sich unmittelbar eine neue Erklärung der Affinnormalen schließt.

Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß *in der Umung des Punktes P die kanonische Entwicklung* (9a) *oder* (9b) *gilt.* $\mathfrak{C}$ die Schnittkurve der gegebenen Fläche mit einer in P oskulieren- Fläche zweiter Ordnung. *Das Tangententripel der Kurve* $\mathfrak{C}$ *in ihrem ifachen Punkte P liegt dann und nur dann zu den Asymptoten dieses nktes apolar, wenn es mit dem Tangententripel von Darboux identisch Die zugehörigen* ∞^1 *oskulierenden Flächen zweiter Ordnung haben e Mittelpunkte auf der Affinnormalen der Fläche im Punkte P.*

---

[13]) Wir nennen quadriertes Halbachsenprodukt einer reellen F_2 mit eigentlichem telpunkt die rationale inhaltstreu-affine absolute Invariante $\Im = -\dfrac{|a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}|^3}{|a_{11}\, a_{22}\, a_{33}|^4}$, n die a_{ik} die Koeffizienten der Gleichung der F_2 bedeuten. Im Texte ist die ichung der F_2, die hier immer singularitätenfrei ist und reelle Punkte besitzt, auf Form:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{\vartheta b^2} + \frac{x_3^2}{\eta c^2} = 1 \qquad (\vartheta^2 = \eta^2 = 1)$$

racht gedacht. Dann ist, wie man leicht überlegt, $\Im = \varepsilon a^2 b^2 c^2$.

[13a]) Implicite ist diese Erklärung im wesentlichen schon in einer Note des rn C. Segre enthalten (Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una erficie. Rend. Acc. Lincei (5) 17II (1908), S. 405—412, insbes. S. 410f.).

Zu diesen Flächen zweiter Ordnung gehört u. a. auch die sogenannte Liesche F_2 des Punktes P. Die vorstehende Erklärung der Affinnormalen verallgemeinert daher eine vom Verfasser an anderer Stelle[10]) ausgesprochene.

Der Beweis für die aufgestellten Behauptungen läßt sich leicht führen. Die drei Tangenten der Schnittkurve $\mathfrak{C}$ der Fläche (9a) bzw. (9b) mit der oskulierenden Fläche zweiter Ordnung (10) im Punkte P genügen den Gleichungen:

$$(13a) \quad x_3 = 0, \qquad \frac{K}{6}(x_1^3 - 3\varepsilon x_1 x_2^2) + \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) = 0,$$

bzw.

$$(13b) \quad x_3 = 0, \qquad \frac{1}{6}(x_1 + x_2)^3 + \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

(13a) sowie (13b) — und ebenso die Glieder 3. Ordnung weiter unten in (15) — hängen nur von c_1 und c_2 ab. Die in P (gerade) oskulierenden Flächen zweiter Ordnung, deren Schnittkurven mit der gegebenen Fläche dort ein und dasselbe Tangententripel besitzen, bilden daher ein Büschel. Ihre Mittelpunkte erfüllen eine (nicht in der Tangentenebene von P liegende) Gerade durch P.

Die Konstanten c_1, c_2 bestimmen wir jetzt so, daß diese Tangenten (13a, b) apolar zu den Asymptoten

$$(14) \qquad x_3 = 0, \qquad x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = 0$$

des Punktes P liegen. Es ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$. Aus (13a, b), (5a, b*) und (11) folgen nunmehr unmittelbar die beiden Behauptungen.

Die vorstehende Rechnung ist wesentlich dieselbe, welche Herr G. Pick[14]) bei der Ableitung der Entwicklung (9a) durchgeführt hat. Unsere Erklärungen sind also im Grunde nichts anderes, als eine geometrische Deutung jener Rechnung. An der Auffindung dieser Deutung ist Herr P. Funk mitbeteiligt.

Wenn im Punkte P die Entwicklung (5c) *gilt*, so sind, wie schon bemerkt, die Tangenten von Darboux unbestimmt. *Unter den die gegebene Fläche im Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung existieren dann* ∞^1 *hyperoskulierende. Der Ort ihrer Mittelpunkte ist die Affinnormale der Fläche in P.*

In der Tat lautet die Gleichung des Zylinders, der die Schnittkurve der Flächen (9c) und (10) parallel zur x_3-Achse projiziert, nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet, folgendermaßen:

$$(15) \quad 0 = \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \{[4] - \tfrac{3}{8}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2)^2\} + \ldots$$

[14]) A. G. IV., S. 26.

bedeutet darin die Glieder vierter Ordnung in der Entwicklung (9c). Schnittkurve C hat also im Anfangspunkt P einen dreifachen Punkt, nge wenigstens eine der beiden Konstanten c_1 und c_2 von Null ver- eden ist; im Falle $c_1 = c_2 = 0$ aber einen vierfachen Punkt. Die zu- örigen „hyperoskulierenden" Flächen zweiter Ordnung (und nur diese) en nach (11) ihren Mittelpunkt auf der Affinnormalen der Fläche im kte P. —

Auch die Affininvariante J gestattet eine geometrische Erklärung mit- der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung:

Ist die kubische Fundamentalform ψ an der betrachteten Stelle P t identisch Null, so gibt es drei — getrennte oder in eines zusammen- ende — Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welche die gegebene che in P oskulieren, und deren Schnittkurve mit der Fläche dort eine fache Tangente hat (die dann notwendig eine Tangente von Darboux [10]*). Die Mittelpunkte der F_2 des k-ten Büschels erfüllen eine Gerade $k = 1, 2, 3$). Bringt man die drei Geraden g_1, g_2, g_3 zum Schnitte der Einheitsebene, und sind $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ die Schnittpunkte, so ist gleich $\frac{4\varepsilon}{3}$ mal dem quadrierten Inhalt des Tetraeders $(P, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$.*

Auch diese Behauptung ist leicht zu beweisen.

Die drei Tangenten (13a) fallen dann und nur dann alle zusammen, n die drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} (K + 3c_1)(K - c_1)\,\varepsilon + c_2^2 = 0, \\ (K - c_1)^2 \cdot \varepsilon - 3c_2^2 = 0, \\ c_2 (K + 2c_1) = 0, \end{cases}$$

denen jede eine Folge der beiden andern ist. Das gibt die drei tepaare:

$$c_1 = K, \quad c_2 = 0; \qquad c_1 = -\frac{1}{2}K, \quad c_2 = \frac{1}{2}K\sqrt{3\varepsilon};$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}K, \quad c_2 = -\frac{1}{2}K\sqrt{3\varepsilon}$$

die in (10) auftretenden Konstanten c_1, c_2. Vermöge (11) erhält man aus als Koordinaten der Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$:

$$K, \ 0, \ 1; \quad -\frac{1}{2}K, \ \frac{1}{2}K\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}, \ 1; \quad -\frac{1}{2}K, \ -\frac{1}{2}K\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}, \ 1;$$

als Inhalt T des Tetraeders $(P, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$:

$$T = \frac{1}{4}K^2\varepsilon\sqrt{3\varepsilon} = -\frac{1}{2}J\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}.$$

In gleicher Weise ergeben die Bedingungen für das Zusammenfallen der drei Tangenten (13b) $c_1 = c_2 = 0$. Dieser Fall ist als Grenzfall des vorigen aufzufassen: Die drei Geraden g_1, g_2, g_3 sind jetzt sämtlich mit der Affinnormalen von P identisch, die Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ mit deren Einheitspunkt; J ist Null.

Für den Fall $J = 0$ $(\psi \not\equiv 0)$ liegt in dem soeben Gesagten eine Erklärung der Affinnormalen, die mit der weiter oben gegebenen identisch ist. Dagegen kann man im Falle $J \neq 0$ durch die letzte Betrachtung auf neuem Wege zur Affinnormalen der Fläche im Punkte P gelangen:

Zunächst *ist die Affinnormale des Punktes P Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke, deren Ebenen zur Tangentenebene der Fläche in P parallel sind, und deren Eckpunkte auf den Geraden* g_1, g_2, g_3 *liegen.*

Ferner *schneiden sich die drei im Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines solchen Dreieckes sind, noch in einem zweiten Punkte R. Die Gerade PR ist die Affinnormale der gegebenen Fläche in P.*

Je zwei solche oskulierende Flächen zweiter Ordnung haben — außer den Asymptoten des Punktes P — einen Kegelschnitt durch P gemeinsam. Die Ebenen der drei so erhaltenen Kegelschnitte (die sämtlich durch die Affinnormale von P laufen) durchdringen die Ebene irgendeines der oben erwähnten Dreiecke in dessen Schwerlinien, und die Tangentenebene der Fläche in P in den drei Tangenten, die zu den Tangenten von Darboux konjugiert sind[15]). *Diese „Tangenten von Segre" sind demnach die Projektionen der Geraden* g_k $(k = 1, 2, 3)$ *parallel zur Affinnormalen des Punktes P in seine Tangentenebene.*

In den betrachteten drei Büscheln von oskulierenden Flächen zweiter Ordnung sind auch drei Paraboloide enthalten, die alle zu demselben Werte $c_3 = K^2 = -2J$ der in (10) auftretenden Konstanten c_3 gehören. Ihr zweiter gemeinsamer Punkt $(0, 0, -\frac{1}{J})$ liegt gleichfalls auf der Affinnormalen des Punktes P. Seine dritte Koordinate kann man als Abstandsverhältnis oder als Affinentfernung vom orientierten Flächenelement zweiter

---

[15]) Diese Tangenten sind zuerst von Herrn C. Segre, a. a. O.[13a]) betrachtet worden. Vgl. auch G. M. Green, On certain projective generalizations of metric theorems, and the curves of Darboux and Segre. Proc. National Acad. of sciences 4 (1918), S. 346–349; Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences. Trans. Amer. Math. Soc. **20** (1919), S. 79–153, insbesondere S. 140ff. — Eine andere affin-invariante Erklärung dieser Tangenten bei W. Blaschke, Über affine Geometrie. XXII: Bestimmung der Flächen mit zentrischen ebenen Schnitten. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 336—338.

nung in P [Nr. 5] deuten, und hat damit eine Erklärung von $-\frac{1}{J}$. J[16]).

5. Affinentfernung eines Punktes vom orientierten Flächenelement iter Ordnung. — Herr G. Pick[1]) hat als erster für einen beliebigen kt Q des Raumes eine vom Flächenelement zweiter Ordnung in P abgende kovariante Koordinate eingeführt, die Herr W. Blaschke[2a]) georisch gedeutet und die *Affinentfernung des Punktes Q vom Element iter Ordnung der Fläche* an der Stelle P genannt hat. Wie bezeichsie mit (P, Q). Wenn x der Vektor des Punktes P, y der des ktes Q ist, so hat man, in allgemeinen Parametern u, v:

$$(P, Q) = \frac{(y - x \quad x_u \quad x_v)}{\sqrt{\varepsilon(eg - f^2)}}.$$

Unter unseren Festsetzungen über die Wurzelgröße [Nr. 1] stellt (20) Affinentfernung des Punktes Q vom *orientierten* Flächenelement zweiter nung in P dar.

Geometrisch läßt sich nun die Affinentfernung (P, Q) auch folgenderßen erklären:

Die Affinentfernung eines Punktes Q vom orientierten Flächenent zweiter Ordnung in P ist gleich der vierten Wurzel aus dem abten Werte des quadrierten Halbachsenproduktes der Fläche zweiter Ordg, die den Punkt Q zum Mittelpunkte hat, und die gegebene Fläche P oskuliert. Diese Wurzel ist positiv oder negativ zu ziehen, je hdem der Punkt Q auf derselben Seite der Tangentenebene in P liegt, der Einheitspunkt der Affinnormalen, oder auf der entgegengesetzten.

Zum Beweise benutzen wir wieder die kanonischen Entwicklungen der Fläche in der Umgebung des Punktes P. Dieser Punkt ist dann Anfangspunkt des Koordinatensystems; ferner ist für u, v bezüglich x_2 zu setzen. Das quadrierte Affinbogenelement im Punkte P hat den Wert (1^*). Man erhält daher aus (20) für die Affinentfernung Q):

$$(P, Q) = y_3.$$

Nach (12) ist das absolut genommene quadrierte Halbachsenprodukt c^2 der oskulierenden Fläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte gleich y_3^4. Man kann also festsetzen, daß:

---

[16]) Wir bemerken schließlich noch Folgendes: Die in P oskulierende Fläche er Ordnung, welche die uneigentlichen Punkte der drei Geraden g_k $(k = 1, 2, 3)$ lt, hat den Mittelpunkt $\left(0, 0, \frac{1}{2J}\right)$. Ihr absolut genommenes quadriertes Halb-

rodukt ist daher $\frac{1}{16J^4}$

(12*) $$\sqrt[4]{a^2 b^2 c^2} \equiv \sqrt{|abc|} = y_3$$

sein soll. Da der Einheitspunkt der Affinnormalen nach (20) und (4) die Affinentfernung Eins vom Elemente zweiter Ordnung der Fläche an der Stelle P hat, ist damit die Richtigkeit der obigen Behauptung nachgewiesen.

6. Der Einheitspunkt der Tangente einer Flächenkurve. — Wir machen schließlich von den oskulierenden Flächen zweiter Ordnung noch eine Anwendung auf die Flächenkurven.

Betrachten wir irgendeine Kurve auf der Fläche, die durch P und einen Nachbarpunkt P' geht[17]). Dann gibt, wie schon Herr W. Blaschke[18]) gezeigt hat, (20) für die Affinentfernung (P, P') bis auf infinitesimale Größen von mindestens dritter Ordnung den Wert:

(22) $$(P, P') = \frac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) = \frac{1}{2}d\sigma^2.$$

Wenn also der Punkt P' auf derselben (auf der entgegengesetzten) Seite der Tangentenebene in P liegt, wie der Einheitspunkt der Affinnormalen, so ist $d\sigma^2$ positiv (negativ), und man kann daher die Kurve in der Umgebung von P in reeller Weise orientieren, indem man sich für einen der beiden reellen Werte von $\frac{dx}{d\sigma}$ $(i\frac{dx}{d\sigma};\ i^2 = -1)$ entscheidet. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir annehmen, *daß die betrachtete Kurve in der Umgebung des Punktes P jenem Bereich der Fläche angehört, in dem* $d\sigma^2 > 0$ *ist.* Es ist nicht schwer einzusehen, wie die Betrachtung in dem hiermit ausgeschlossenen Fall $(\varepsilon = -1$, $d\sigma^2 < 0)$ zu modifizieren ist[19]).

Die (auf die angegebene Weise affin-orientierte) Kurve sei auf den Affinbogen σ als unabhängige Veränderliche bezogen. Dann nennen wir den Punkt E auf der Kurventangente, dessen Vektor $x + \frac{dx}{d\sigma}$ ist (wo $\frac{dx}{d\sigma}$ den Wert im Punkte P bedeutet), den *Einheitspunkt der (orientierten) Kurventangente.*

Für diesen Punkt läßt sich eine einfache Konstruktion angeben. Dazu betrachten wir die Fläche zweiter Ordnung, welche die gegebene Fläche im Punkte P oskuliert und den Einheitspunkt der Affinnormalen von P zum Mittelpunkte hat. Sie ist durch (10) mit $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$ ge-

---

[17]) Die Kurve sei reell, besitze überall eine Tangente, deren Richtung sich von Punkt zu Punkt stetig ändert, und habe in P einen regulären Punkt, dessen Tangente von den Asymptoten der Fläche in P verschieden ist. Insbesondere darf sie auch eine Gerade sein.

[18]) A. G. V., S. 180.

[19]) Vgl. auch weiter unten im Texte.

en[20]). Die Schnittkurve dieser F_2 mit der Einheitsebene projizieren wir allel zur Affinnormalen des Punktes P in seine Tangentenebene. Die jizierte Kurve hat die Gleichungen

$$z_1^2 + \varepsilon z_2^2 = 1, \qquad z_3 = 0,$$

also ein Kegelschnitt vom Mittelpunkte P, dessen Asymptoten die mptoten der Fläche in P sind. Wegen (1^*) liegt dann der Punkt E dieser Projektion, ist also ihr Schnittpunkt mit dem positiven gentenspeer.

Im hyperbolischen Falle $(\varepsilon = -1)$ ist der Einheitspunkt auf der zur gente der betrachteten Kurve konjugierten Flächentangente imaginär. n wird daher statt dieses Einheitspunktes zweckmäßig den Schnittpunkt der orientierten konjugierten Tangente mit der zur Hyperbel (23) konerten Hyperbel betrachten. Diese läßt sich in analoger Weise wie die perbel (23) mittels der oskulierenden F_2 erhalten, deren Mittelpunkt Vektor $x - x^*$ hat. —

Durch Festlegung des Einheitspunktes auf jeder Kurventangente ist dieser ein affines Längenmaß gegeben: der Punkt, dessen Vektor $-\lambda_1 \frac{dx}{d\sigma}$ ist, hat vom Punkte mit dem Vektor $x + \lambda_2 \frac{dx}{d\sigma}$ die Affinentung $\lambda_1 - \lambda_2$[21]).

7. Schlußbemerkung. — Wir haben im vorhergehenden den Vortrag eingerichtet, daß wir die in Rede stehenden Begriffe der affinen Flächenorie zuerst rein analytisch einführten, und sodann auf Grund der anaschen Definition mit Hilfe der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung metrische Erklärungen für sie gaben.

Ein Teil jener Begriffe (Tangenten von Darboux und Segre, Affinmale) kann, wie man unmittelbar einsieht, nach Nr. 4 *ohne weiteres* geführt werden. Aber auch die Einführung der übrigen Begriffe (Affinfernung eines Punktes Q vom Flächenelement zweiter Ordnung in P, heitsebene, Einheitspunkt der Affinnormalen, Einheitspunkt der Tangente

[20]) An Stelle der von uns verwendeten oskulierenden Fläche zweiter Ordnung n man auch, unter leichter Abänderung des Verfahrens, das in P oskulierende boloid benutzen, das die Affinnormale des Punktes P zum Durchmesser hat.

[21]) Schneidet man die im Punkte P oskulierende F_2, deren Mittelpunkt Z auf Affinnormalen von P in der positiven Affinentfernung a^2 vom orientierten Flächenent zweiter Ordnung in P liegt, mit einer Parallelebene durch Z zur Einheitse, und projiziert die Schnittkurve parallel zur Affinnormalen in die Tangentenе von P, so hat die Projektion die Gleichungen:

$$z_1^2 + \varepsilon z_2^2 = a^2, \qquad z_3 = 0.$$

Schnittpunkt mit dem positiven Tangentenspeer hat daher die Affinentfernung a Punkte P.

einer Flächenkurve) kann ohne Bezug auf eine vorausgehende analytische Definition geschehen, wenn man folgendermaßen verfährt:

Man erklärt zunächst bei elliptisch gekrümmten Flächen etwa die hohle Seite (bei Eiflächen also das Innere), bei hyperbolisch gekrümmten aber eine beliebige Seite als die *positive* Seite der Fläche. Hierdurch wird das betrachtete Flächenstück orientiert. Sodann führt man die Affinentfernung eines beliebigen Punktes Q vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P durch die in Nr. 5 gegebene geometrische Erklärung ein, die nur dahin abzuändern ist, daß man die dort auftretende Wurzel positiv oder negativ zu ziehen hat, je nachdem Q auf der positiven oder negativen Seite der Fläche liegt. Die Ortsebene aller Punkte Q, die vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P die Affinentfernung Eins haben, ist jetzt als Einheitsebene zu bezeichnen, ihr Schnittpunkt mit der Affinnormalen von P als Einheitspunkt der Affinnormalen[22]). Mit Hilfe dieser Begriffe lassen sich endlich nach Nr. 4 und 6 die noch übrigen erklären.

Prag, den 26. Juni 1920.

---

[22]) Die so erhaltene Definition der Einheitsebene und des Einheitspunktes der Affinnormalen stimmt nicht notwendig mit der in Nr. 1 gegebenen überein.

(Eingegangen am 8. Juli 1920.)

Approximation algebraischer Zahlen.

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Einleitung.

1. Im Jahre 1851 zeigte Liouville (Liouville 1): Zu jeder algebraischen
l ξ vom Grade $n \geqq 2$ gibt es ein positives $a_1 = a_1(\xi)$ derart, daß für
e Paare x, y ganzer rationaler Zahlen mit $y > 0$ die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| > \frac{a_1}{y^n}$$

).

2. Diese fast triviale Abschätzung verbesserte Thue (Thue 3) 1908
folgender: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein positives $a_2 = a_2(\xi, \varepsilon)$, so daß
) durch die schärfere Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| > \frac{a_2}{y^{\frac{n}{2} + 1 + \varepsilon}}$$

etzt werden kann. Mit Hilfe hiervon bewies dann Thue seinen be-
nnten Satz: Bedeutet $U(x, y)$ eine homogene binäre Form mit rationalen
effizienten, die nicht Potenz einer linearen oder indefiniten quadratischen
rm ist, so hat die Diophantische Gleichung $U(x, y) = k$ für jedes
ionale $k \neq 0$ nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen x, y.

Bereits Thue wies auf eine naheliegende Erweiterung dieses Satzes
, die dann von Maillet (Maillet 2) 1916 ausgeführt wurde. Ist näm-
n n der Grad von $U(x, y)$ und $V(x, y)$ irgendein zu $U(x, y)$ teiler-
ndes Polynom, dessen Dimension $< \frac{n}{2} - 1$ ist, so bleibt der Satz von
ue richtig, wenn k durch $V(x, y)$ ersetzt wird.

Thue zeigte ferner mit Hilfe seines Satzes, daß der größte Prim-
er des Polynoms $f(x) = (ax + b)(cx + d)$, wo a, b, c, d ganze rationale
ılen mit $ad - bc \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ bedeuten, über alle Grenzen wächst,
ın x die Reihe der natürlichen Zahlen wachsend durchläuft. Für spezielle

Werte der Koeffizienten (sowie für $f(x) = x^3 + 1$) war dies bereits durch Størmer bekannt (Størmer 1, 2). Pólya hat 1918 gezeigt (Pólya 2), daß diese Aussage bestehen bleibt, wenn $f(x)$ irgendeine quadratische Funktion von nichtverschwindender Diskriminante mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeutet.

3. Durch Thues Untersuchungen ist nahegelegt worden, den Exponenten $\frac{n}{2} + 1 + \varepsilon$ weiter zu verkleinern zu suchen. Welches diejenige Funktion von n ist, die den kleinstmöglichen Wert des Exponenten angibt, ist unbekannt. Ich beweise aber in dieser Arbeit, welche ein Abdruck meiner Inaugural-Dissertation (Göttingen 1920) ist: Es gibt ein positives $a_3 = a_3(\xi)$, so daß die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{a_3}{y^{2\sqrt{n}}}$$

besteht; dies gilt sogar (mit $a_3 = a_3(\xi, \varepsilon)$), wenn $2\sqrt{n}$ durch den besseren Wert $\min\limits_{\lambda=1,\dots n} \left(\frac{n}{\lambda+1} + \lambda\right) + \varepsilon$ ersetzt wird.

Im folgenden erscheint dies als spezieller Fall eines Satzes über die Stärke der Approximation einer algebraischen Zahl durch eine andere. Ist nämlich ein algebraischer Zahlkörper K gegeben, in bezug auf welchen ξ vom Grade $d \geqq 2$ ist, bedeutet ζ eine primitive Zahl von K und l das Maximum der absolut genommenen teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten der irreduziblen Gleichung für ζ, so gilt für ein gewisses $a_4 = a_4(\xi, K) > 0$:

$$|\xi - \zeta| > \frac{a_4}{l^{2\sqrt{d}}}; \tag{C}$$

dies bleibt sogar richtig (mit $a_4 = a_4(\xi, K, \varepsilon)$), wenn $2\sqrt{d}$ durch $\min\limits_{\lambda=1,\dots d} \left(\frac{d}{\lambda+1} + \lambda\right) + \varepsilon$ ersetzt wird.

Beschränkt man sich bei der Approximatiou von ξ nicht auf Zahlen eines festen Körpers K, sondern läßt für ζ beliebige algebraische Zahlen eines festen Grades $h < n$ zu, so gilt Ungleichung (C), wenn darin $2\sqrt{d}$ durch $2h\sqrt{n}$ $\left(\text{resp. durch } \min\limits_{\lambda=1,\dots n} \left(\frac{n}{\lambda+1} + \lambda\right)h + \varepsilon\right)$ ersetzt wird.

§ 1 enthält den Beweis dieser beiden Sätze.

§ 2 gibt einige Anwendungen derselben. Insbesondere (Satz 5) verallgemeinere ich den Thueschen Satz über Diophantische Gleichungen auf beliebige algebraische Zahlkörper. Satz 7 dehnt den Thue-Pólyaschen Satz über die Primteiler quadratischer Funktionen auf beliebige Polynome in beliebigen Zahlkörpern aus. Satz 9 ist die entsprechende

sage über gebrochene rationale Funktionen. Satz 8 liefert eine arithische Eigenschaft der Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung geer gebrochener rationaler Funktionen.

§ 1.

Hilfssatz I. Es seien $\lambda_1, \ldots \lambda_h$ irgend welche Zahlen. Es bedeute den größten der absolut genommenen Koeffizienten des Polynoms $\prod_{\nu=1}^{h}(z-\lambda_\nu)$. Dann ist

$$\prod_{\nu=1}^{h}(1+|\lambda_\nu|) \leqq 6^h A.$$

Beweis[1]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\lambda_1, \ldots \lambda_\tau$ diegen von den h Zahlen, deren absoluter Betrag $\leqq 2$ ist (wenn es solche). Das Polynom $f(z) = \prod_{\nu=1}^{\tau}(z-\lambda_\nu)$ ist in einem Punkte z_0 des Einskreises absolut $\geqq 1$; bedeuten nämlich $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\tau$ die sämtlichen 1-ten Einheitswurzeln, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\tau}\varepsilon_\nu f(\varepsilon_\nu) = \tau + 1,$$

laß z_0 sogar als $\tau+1$-te Einheitswurzel gewählt werden kann. Dann ist

$$\prod_{\nu=1}^{\tau}(1+|\lambda_\nu|) \leqq (1+2)^\tau = 3^\tau \leqq 3^\tau \Big|\prod_{\nu=1}^{\tau}(z_0-\lambda_\nu)\Big|.$$

Ist $\tau < h$, so ist für $\nu = \tau+1, \ldots h$[2]) wegen $|\lambda_\nu| > 2$

$$\frac{1+|\lambda_\nu|}{|z_0-\lambda_\nu|} \leqq \frac{1+|\lambda_\nu|}{|\lambda_\nu|-|z_0|} = \frac{|\lambda_\nu|+1}{|\lambda_\nu|-1} = 1+\frac{2}{|\lambda_\nu|-1} < 1+\frac{2}{2-1} = 3,$$

$$\prod_{\nu=\tau+1}^{h}(1+|\lambda_\nu|) < 3^{h-\tau}\Big|\prod_{\nu=\tau+1}^{h}(z_0-\lambda_\nu)\Big|.$$

Wegen (1) ergibt sich

$$\lambda_\nu|) \leqq 3^h\Big|\prod_{\nu=1}^{h}(z_0-\lambda_\nu)\Big| \leqq 3^h A\,(|z_0|^h+\ldots+1) = 3^h(h+1)A \leqq 6^h A^{3}).$$

---

[1]) Herrn Ostrowski verdanke ich Vereinfachungen beim Beweis der Hilfs- I und II.

[2]) bzw., wenn $\lambda_1, \ldots \lambda_h$ sämtlich absolut >2 sind, für $\nu = 1, \ldots h$.

[3]) Für $h \geqq 1$ ist $1+h \leqq 1+\binom{h}{1}+\ldots+\binom{h}{h} = (1+1)^h = 2^h$.

Hilfssatz II. Es sei

$$f(x) = a_0 x^h + \ldots + a_h$$

ein Polynom mit beliebigen Koeffizienten $a_0, \ldots a_h$, deren absolute Be träge das Maximum $a > 0$ haben. Ich setze für irgendein λ

$$g(x) = (x - \lambda) f(x) = c_0 x^{h+1} + \ldots + c_{h+1}, \qquad \max(|c_0|, \ldots |c_{h+1}|) = c$$

Dann ist

$$\frac{a}{c} \leqq h + 1.$$

Beweis[1]). 1. Es sei $|\lambda| \leqq 1$. Dann sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a$ von $f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda}$ gleich

$$c_0, c_0\lambda + c_1, \ldots, c_0\lambda^h + \ldots + c_h,$$

also absolut $\leqq (h+1)c$.

2. Es sei $|\lambda| > 1$. Aus

$$(1 - \lambda y)(a_0 + \ldots + a_h y^h) = c_0 + \ldots + c_{h+1} y^{h+1},$$
$$\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)(a_h y^h + \ldots + a_0) = -\frac{c_{h+1}}{\lambda} y^{h+1} - \ldots - \frac{c_0}{\lambda}$$

folgt dann wegen $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$ nach 1.

$$a \leqq (h+1)\frac{c}{|\lambda|} < (h+1)c.$$

Hilfssatz III. Es sei

$$p(x) = k_0 x^h + \ldots + k_h \qquad (k_0 > 0$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das im Körper der rationalen Zahlen reduzibel ist:

$$p(x) = (k_0' x^{h'} + \ldots + k_{h'}') q(x) \qquad (0 < h' < h, \quad (k_0', \ldots k_{h'}') = 1)$$

Setzt man

$$\max(|k_0|, \ldots |k_h|) = k, \qquad \max(|k_0'|, \ldots |k_{h'}'|) = k',$$

so gilt

$$\frac{k'}{k} \leqq \tau_1,$$

wo τ_1 nur von h abhängt.

Beweis. Ich setze

$$h'' = h - h', \quad q(x) = d(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_{h''}), \quad f(x) = k_0' x^{h'} + \ldots + k_{h'}'$$

dann ist d ganz rational und $\neq 0$, also absolut $\geqq 1$. Ich füge zu $f(x$ nacheinander die Faktoren $(x - \lambda_{h''}), \ldots (x - \lambda_1)$ hinzu und benutze Hilfs satz II. Es wird

$$\frac{k'}{k} \leqq \frac{|d|\,k'}{k} \leqq (h'+1)(h'+2)\ldots h \leqq h!,$$

aß $\tau_1 = h!$ das Verlangte leistet.

Hilfssatz IV. Es seien $p_0(x), \ldots p_\nu(x)$ Polynome mit Koeffizienten einem algebraischen Zahlkörper K, die in bezug auf diesen linear unängig sind. Dann verschwindet die Determinante

$$W(x) = |\,p_\lambda^{(\varkappa)}(x)\,| \qquad (\varkappa = 0, \ldots \nu;\ \lambda = 0, \ldots \nu)$$

t identisch[4]).

Beweis. Für $\nu = 0$ ist der Satz offenbar richtig. Es sei $\nu > 0$ und Satz für $\nu - 1$ schon bewiesen. Dann ist die Determinante

$$d_{\nu\nu}(x) = |\,p_\lambda^{(\varkappa)}(x)\,| \qquad (\varkappa = 0, \ldots \nu - 1;\ \lambda = 0, \ldots \nu - 1)$$

t identisch 0. Daher gibt es ein Intervall $x_1 < x < x_2$, in welchem $x) \neq 0$ ist. Bei dem folgenden Beweis darf x auf dieses Intervall hränkt werden.

Die ν linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x)\, q_\lambda(x) = -\,p_\nu^{(\varkappa)}(x) \qquad (\varkappa = 0, \ldots \nu - 1)$$

den wegen $d_{\nu\nu}(x) \neq 0$ durch ein System rationaler Funktionen $q_\lambda(x)$ Koeffizienten aus K erfüllt. Ich verstehe unter $d_{\varkappa\lambda}(x)$ für $\varkappa = 0, \ldots \nu$; $0, \ldots \nu$ die Unterdeterminante von $p_\lambda^{(\varkappa)}(x)$ in $W(x)$; dies ist für ν, $\lambda = \nu$ in Einklang mit der Bezeichnung (2). Ich multipliziere nun Gleichungen (3) mit $d_{\varkappa\nu}(x)$ für $\varkappa = 0, \ldots \nu - 1$ und addiere sie; dann bt sich

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} q_\lambda(x) \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\lambda^{(\varkappa)}(x) = -\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\nu^{(\varkappa)}(x).$$

ı ist $\sum_{\varkappa=0}^{\nu} d_{\varkappa\nu}(x)\, p_\lambda^{(\varkappa)}(x) = 0$ für $\lambda = 0, \ldots \nu - 1$, $= W(x)$ für $\lambda = \nu$;

daher

$$-\,d_{\nu\nu}(x) \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\nu)}(x)\, q_\lambda(x) = d_{\nu\nu}(x)\, p_\nu^{(\nu)}(x) - W(x).$$

re nun $W(x)$ identisch 0, so folgte hieraus wegen des Nichtverschwin- s von $d_{\nu\nu}(x)$

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\nu)}(x)\, q_\lambda(x) = -\,p_\nu^{(\nu)}(x);$$

[4]) Die Eigenschaften der Wronskischen Determinante sind in der Literatur ach entwickelt worden; da aber im folgenden die schärfere arithmetische Voraus- ung benutzt wird, führe ich der Vollständigkeit halber den Beweis an.

(3) würde also auch für $\varkappa = \nu$ gelten. Differentiiere ich die Gleichungen (3) für $\varkappa = 0, \dots \nu - 1$, so erhalte ich

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x) q_\lambda'(x) + \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa+1)}(x) q_\lambda(x) = -p_\nu^{(\varkappa+1)}(x) \quad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1)$$

oder mit Rücksicht auf (3) und (4)

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} p_\lambda^{(\varkappa)}(x) q_\lambda'(x) = 0 \qquad (\varkappa = 0, \dots \nu - 1)$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist $d_{\nu\nu}(x) \neq 0$. Daher ist

$$q_\lambda'(x) = 0 \qquad (\lambda = 0, \dots \nu - 1)$$

also $q_\lambda(x)$ konstant, also als rationale Funktion mit Koeffizienten aus K eine Zahl aus K. Die Gleichung (3) würde also für $\varkappa = 0$ eine homogene lineare Relation zwischen $p_0(x), \dots p_\nu(x)$ mit konstanten Koeffizienten aus K darstellen, die nicht alle 0 sind. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist α eine algebraische Zahl $\neq 0$, so nenne ich den größten der absolut genommenen teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten in der irreduziblen Gleichung für α ihre *Höhe* $H(\alpha)$; dies ist also eine natürliche Zahl, welche durch α eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe dieser Bezeichnung spreche ich folgende Behauptung aus:

Hauptsatz (Satz 1). Es sei ξ eine ganze algebraische Zahl n-ten Grades ($n \geqq 2$).

1. Es sei K_0 ein fester algebraischer Zahlkörper. ξ genüge einer in K_0 irreduziblen Gleichung vom Grade $d \geqq 2$ mit Koeffizienten aus K_0. Es sei s eine natürliche Zahl $< d$.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$|\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{\frac{d}{s+1} + s + \Theta}} \tag{5}$$

nur endlich viele Lösungen in primitiven Zahlen η aus K_0.

2. Es seien h und s zwei natürliche Zahlen, von denen $s < n$ ist.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$|\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{h\left(\frac{n}{s+1} + s\right) + \Theta}} \tag{6}$$

nur endlich viele Lösungen in algebraischen Zahlen η vom Grade h.

Dem Beweise schicke ich noch einige Hilfssätze voraus, von denen der erste auch an und für sich von Interesse ist.

Im folgenden bedeutet Ω den Körper der rationalen Zahlen. Ist P endein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, so bedeute $\overline{|P|}$ das ximum der absoluten Beträge dieser Koeffizienten und ihrer in bezug Ω Konjugierten[5]).

Hilfssatz V. Es sei P ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n_0. sei ξ eine ganze algebraische Zahl n-ten Grades, die in bezug auf P vom ade d $(n \geqq d \geqq 2)$ ist, d. h. die einer in P irreduziblen Gleichung d-ten ades mit Koeffizienten aus P genügt. Der Körper $\mathsf{P}(\xi)$ werde mit K zeichnet; sein Grad ist $dn_0 \geqq n$.

Es seien r und s zwei natürliche Zahlen, von denen $s \leqq d-1$ ist. sei $0 < \vartheta < 1$. Ich setze

$$m = \left[\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - 1\right) r\right];$$

ist also eine ganze rationale Zahl $\geqq 0$.

Behauptung. Es gibt

1. zwei von P, ξ, r, s, ϑ abhängige Polynome $F(x,y)$ und $G(x,y)$ n den Graden[6]) m in x, s in y, und $m+r$ in x, $s-1$ in y, mit ganzen effizienten aus K,

2. ein ebenfalls von P, ξ, r, s, ϑ abhängiges nicht identisch ver- windendes Polynom $R(x,y)$ vom Grade $m+r$ in x, s in y, mit ganzen effizienten aus P,

3. zwei nur von ξ, P, ϑ und nicht von r, s abhängige positive Zahlen c_2 mit folgenden Eigenschaften:

I. Es gilt die Identität

$$(x-\xi)^r F(x,y) + (y-\xi) G(x,y) = R(x,y);$$

II. es ist

$$\overline{|F|} < c_1^r, \qquad \overline{|G|} < c_1^r, \qquad \overline{|R|} < c_1^r;$$

III. wird für jedes ganze ϱ des Intervalls $0 \leqq \varrho \leqq r$

$$R_\varrho(x,y) = \frac{\partial^\varrho R(x,y)}{\varrho!\,\partial x^\varrho}\ ^{7}),$$

$$F_\varrho(x,y) = \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho-\lambda} (x-\xi)^\lambda \frac{\partial^\lambda F(x,y)}{\lambda!\,\partial x^\lambda},$$

$$G_\varrho(x,y) = \frac{\partial^\varrho G(x,y)}{\varrho!\,\partial x^\varrho}$$

setzt, so ist

[5]) Ich benutze diese Bezeichnung auch, wenn P eine Konstante ist.
[6]) Unter Grad ist bei Polynomen nie der genaue Grad gemeint.
[7]) 0-te Ableitung einer Funktion bedeutet natürlich diese Funktion selbst.

$$(13) \qquad (x-\xi)^{r-\varrho} F_\varrho(x,y) + (y-\xi) G_\varrho(x,y) = R_\varrho(x,y),$$

$$(14) \quad \begin{cases} |F_\varrho(x,y)| < c_2^r (1+|x|)^m (1+|y|)^s, \\ |G_\varrho(x,y)| < c_2^r (1+|x|)^{m+r-\varrho} (1+|y|)^s, \quad (x, y \text{ beliebig komplex}) \\ |R_\varrho(x,y)| < c_2^r (1+|x|)^{m+r-\varrho} (1+|y|)^s; \end{cases}$$

und dieselben Abschätzungen gelten für die konjugierten Polynome[8]).

Beweis. Es sei a eine natürliche Zahl. Ich betrachte diejenigen Polynome $P(x,y)$ vom Grade $m+r$ in x, s in y, mit ganzen Koeffizienten aus P, welche der Bedingung $\overline{|P|} \leqq a$ genügen. Ihre offenbar endliche Anzahl sei N.

Es gibt eine Basis $\omega_1, \ldots \omega_{n_0}$ von P, so daß

$$\max\left(\overline{|\omega_1|}, \ldots \overline{|\omega_{n_0}|}\right) \leqq c_3$$

ist, wo c_3 (wie auch im folgenden $c_4, \ldots$) eine natürliche Zahl bedeutet, die nur von ξ, P, ϑ abhängt.

n_0 ganze rationale Zahlen $a_1, \ldots a_{n_0}$ mögen den Bedingungen

$$|a_\nu| \leqq \frac{a}{c_3 n_0} \qquad (\nu = 1, \ldots n_0)$$

genügen; dann gilt für $\alpha = \sum_{\nu=1}^{n_0} a_\nu \omega_\nu$ die Ungleichung $\overline{|\alpha|} \leqq a$.

Die Anzahl der Koeffizienten von $P(x,y)$ ist $(m+r+1)(s+1)$. Da für jedes ganze rationale a_ν $(\nu = 1, \ldots n_0)$ zwischen $-\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right]$ und $+\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right]$ die Zahl α einen Koeffizienten eines zulässigen P bildet, so ist

$$(15) \qquad N \geqq \left(2\left[\frac{a}{c_3 n_0}\right] + 1\right)^{n_0 (m+r+1)(s+1)} > \left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0 (m+r+1)(s+1)}.$$

Ich setze nun

$$\frac{\partial^\lambda P(x,y)}{\lambda!\, \partial x^\lambda} = P_\lambda(x,y)\ ^7), \qquad (\lambda = 0, \ldots r-1).$$

Dann ist

$$\overline{|P_\lambda|} \leqq \binom{m+r}{\lambda} \overline{|P|},$$

oder, wegen

$$\binom{m+r}{\lambda} < \binom{m+r}{0} + \ldots + \binom{m+r}{\lambda} + \ldots + \binom{m+r}{m+r} = (1+1)^{m+r} = 2^{m+r},$$

$$\overline{|P_\lambda|} \leqq 2^{m+r} \overline{|P|} \leqq 2^{m+r} a;$$

also, wenn $\overline{|\xi|} = b$ gesetzt wird,

$$\overline{|P_\lambda(\xi,\xi)|} \leqq 2^{m+r} a (1 + b + \ldots + b^{m+r-\lambda})(1 + b + \ldots + b^s) \leqq 2^{m+r} (1+b)^{m+r+}$$

[8]) d. h. die Polynome, deren Koeffizienten zu denen von F_ϱ, G_ϱ, R_ϱ konjugiert sind.

Nach (7) ist

$$m+r<m+r+s\leqq\frac{d+\vartheta}{s+1}r+s<\frac{n+1}{2}r+n<c_5 r,$$

$$\overline{|P_\lambda(\xi,\xi)|}<c_5^r a=t.$$

Es sei α eine der r Zahlen $P_\lambda(\xi,\xi)$ $(\lambda=0,\dots r-1)$. Von den zu konjugierten Körpern seien $K^{(1)},\dots K^{(r_1)}$ reell und die Paare $K^{(r_1+\nu)}$, $^{+r_2+\nu)}$ $(\nu=1,\dots r_2;\ dn_0=r_1+2r_2$, wobei r_1 oder r_2 auch 0 sein n) konjugiert komplex; dann ist zu jedem α durch die Gleichungen

$=\alpha^{(\nu)}$ für $\nu=1,\dots r_1;\ \alpha_\nu+i\alpha_{r_2+\nu}=\alpha^{(\nu)}$ für $\nu=r_1+1,\dots r_1+r_2$

System von dn_0 reellen Zahlen $\alpha_1,\dots\alpha_{dn_0}$ eindeutig bestimmt. Für s der N Polynome $P(x,y)$ mit $\overline{|P|}\leqq a$ wird also durch die r Zahlen $\xi,\xi)$ ein Punkt eines $dn_0 r$-dimensionalen Raumes erzeugt, und jeder he Punkt liegt wegen (16) in einem festen Würfel von der Kanten- e $2t$. Zerlegt man bei jeder Koordinate die Strecke $-t$ bis $+t$ in gleiche Teile, so zerfällt dieser Würfel in $(3t)^{dn_0 r}$ Teilwürfel von der tenlänge $\frac{2}{3}$.

Ist nun die Anzahl der Polynome $P(x,y)$

$$N>(3t)^{dn_0 r},$$

größer als die Anzahl der Teilwürfel, so liegt für mindestens zwei nome P^* und P^{**} der ihnen zugeordnete Punkt in oder auf dem- en Teilwürfel. Es gelten daher die Ungleichungen

$$\overline{|P_\lambda^*(\xi,\xi)-P_\lambda^{**}(\xi,\xi)|}\leqq\sqrt{2}\,\frac{2}{3}<1\quad(\lambda=0,\dots r-1).$$

Links steht eine ganze algebraische Zahl $P_\lambda^*-P_\lambda^{**}$; da ihre Norm ist, so ist sie 0. Die Entwicklung von $R=P^*-P^{**}$ nach Potenzen $x-\xi$ und $y-\xi$ hat also die Form

$$R(x,y)=(x-\xi)^r F(x,y)+(y-\xi)G(x,y),$$

die Koeffizienten von F und G ganze Zahlen aus K sind, während Koeffizienten von R in P liegen und nebst ihren Konjugierten absolut a sind.

Nach (15) und (16) ist für das Bestehen von (17) hinreichend

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0(m+r+1)(s+1)}>(3c_6^r a)^{n_0 dr},$$

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{(m+r+1)(s+1)}>(3c_6^r a)^{dr}.$$

en (7) ist nun

$$(m+r+1)(s+1)=\left(\left[\frac{d+\vartheta}{s+1}r\right]+1\right)(s+1)>(d+\vartheta)r,$$

so daß es genügt,

$$\left(\frac{a}{c_4}\right)^{d+\delta} > (3\,c_8^r a)^d,$$

$$a = c_7^r$$

zu setzen.

(18) wird durch

$$F(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s}(x-\xi)^{\varkappa}(y-\xi)^{\lambda}\left(\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+r}R(x,y)}{(\varkappa+r)!\,\lambda!\,\partial x^{\varkappa+r}\partial y^{\lambda}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi}$$

$$G(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{s-1}(x-\xi)^{\varkappa}(y-\xi)^{\lambda}\left(\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+1}R(x,y)}{\varkappa!\,(\lambda+1)!\,\partial x^{\varkappa}\partial y^{\lambda+1}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi}$$

erfüllt. Wegen

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}R(x,y)}{\alpha!\,\beta!\,\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right| \leqq \binom{m+r}{\alpha}\binom{s}{\beta}|R| < 2^{m+r+s}2a < c_1^r,$$

$$\left|\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta}R(x,y)}{\alpha!\,\beta!\,\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right)_{x=\xi,\,y=\xi}\right| < c_3^r(1+b+\ldots+b^{m+r}\quad)(1+b+\ldots+b^{s-\beta})$$

$$\leqq c_3^r(1+b)^{m+r+s} < c_9^r$$

(für $\alpha \leqq m+r, \beta \leqq s$) ist[9])

$$|F(x,y)| < (1+2b)^m(1+2b)^s c_9^r < c_{10}^r,$$

$$|G(x,y)| < (1+2b)^{r-1}(1+2b)^{s-1}c_9^r < c_{11}^r.$$

Setzt man $\max(3c_7, c_{10}, c_{11}) = c_1$, so sind die Teile I und II der Behauptung bewiesen.

Ich differentiiere (8) ϱ-mal nach x:

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho}\binom{\varrho}{\lambda}\binom{r}{\varrho-\lambda}(\varrho-\lambda)!\,(x-\xi)^{r-\varrho+\lambda}\lambda!\frac{\partial^{\lambda}F(x,y)}{\lambda!\,\partial x^{\lambda}} + (y-\xi)\,\varrho!\,G_{\varrho}(x,y) = \varrho!\,R_{\varrho}(x$$

$$(x-\xi)^{r-\varrho}\sum_{\lambda=0}^{\varrho}\binom{r}{\varrho-\lambda}\binom{\varrho}{\lambda}\frac{\lambda!\,(\varrho-\lambda)!}{\varrho!}(x-\xi)^{\lambda}\frac{\partial^{\lambda}F(x,y)}{\lambda!\,\partial x^{\lambda}} + (y-\xi)\,G_{\varrho}(x,y) = R_{\varrho}(x$$

Wird die Relation

$$\binom{\varrho}{\lambda} = \frac{\varrho!}{\lambda!\,(\varrho-\lambda)!}$$

berücksichtigt, so entsteht (13).

Wegen (9) folgt aus (12) und (10)

$$|G_{\varrho}| \leqq \binom{m+r}{\varrho}|G| < 2^{m+r}c_1^r < c_{12}^r, \quad |R_{\varrho}| < c_{13}^r,$$

[9]) Mit Rücksicht auf $b \geqq 1$.

aus (11)

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \binom{r}{\varrho-\lambda}\left(1+\binom{\lambda}{1}b+\ldots+b^{\lambda}\right)\binom{m}{\lambda}c_1^r < 2^r c_1^r \sum_{\lambda=0}^{m}\binom{m}{\lambda}(1+b)^{\lambda}$$

$$= (2c_1)^r(2+b)^m < c_{13}^r.$$

setze $c_2 = \max(c_{12}, c_{13})$; dann ist

$$|F_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s} |x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^m(1+|y|)^s,$$

$$|G_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m+r-\varrho}\sum_{\lambda=0}^{s-1} |x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s,$$

$$|R_\varrho(x,y)| < c_2^r \sum_{\varkappa=0}^{m+r-\varrho}\sum_{\lambda=0}^{s} |x^\varkappa y^\lambda| \leqq c_2^r(1+|x|)^{m+r-\varrho}(1+|y|)^s,$$

mit auch Teil III der Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz VI. P, ξ, ϑ, d, m, n, r, s haben die Bedeutung des vorigen ssatzes V; außerdem mögen für r und ϑ die Ungleichungen

$$r \geqq 2n^2,$$

$$\vartheta \leqq \frac{1}{2}$$

en. Für das in demselben Hilfssatz bestimmte Polynom $R(x,y)$ werde

$$R(x,y) = \sum_{\mu=0}^{s} f_\mu(x)\, y^\mu$$

tzt. Es bezeichne $s'+1$ die Anzahl in bezug auf P linear unängiger unter den $s+1$ Polynomen $f_0(x), \ldots f_s(x)$. s' ist $\geqq 0$, da Polynome nicht sämtlich identisch 0 sind; und es ist $s' \leqq s$. Es seien $\ldots \lambda_{s'}$ so gewählt, daß $f_{\lambda_0}(x), \ldots f_{\lambda_{s'}}(x)$ in P linear unabhängig sind. n sind also $\lambda_0, \ldots \lambda_{s'}$ verschiedene Zahlen der Reihe 0 bis s. Gegeben eine feste von den zu ξ in bezug auf P Konjugierten verschiedene Zahl η. werde die Determinante

$$|f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x)| = \Delta(x) \qquad (\alpha = 0, \ldots s';\ \beta = 0, \ldots s')$$

tzt.

Behauptung. Es gibt eine nicht negative ganze Zahl $\gamma \leqq \vartheta r (n-1)$, also nach (19) und (20) $\leqq \frac{1}{2}r + \frac{r}{2} - n = r - n$, derart, daß Zahl

$$\Delta^{(\gamma)}(\eta) = \left(\frac{d^\gamma \Delta(x)}{dx^\gamma}\right)_{x=\eta}$$

t 0 ist.

Beweis. Drücke ich alle $f_\mu(x)$ $(\mu = 0, \ldots s)$ durch $f_{\lambda_0}(x), \ldots f_{\lambda_{s'}}(x)$ aus, so gehe (21) über in

$$R(x,y) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}(x)\, U_\beta(y), \tag{22}$$

wo $U_\beta(y)$ ein Polynom s-ten Grades in y mit Koeffizienten aus P bedeutet, das nicht identisch 0 ist. Nach Hilfssatz IV ist wegen der linearen Unabhängigkeit der $f_{\lambda_\beta}(x)$ das Polynom $\Delta(x)$ nicht identisch 0.

Aus (22) und (8) folgt für jedes α der Reihe $0, \ldots s'$

$$\sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x)\, U_\beta(\xi) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\{(x-\xi)^r F(x,\xi)\}.$$

Diese Gleichung multipliziere ich mit der Unterdeterminante $\Delta_\alpha(x)$ von $f_{\lambda_0}^{(\alpha)}(x)$ in $\Delta(x)$[10]) und summiere über α von 0 bis s'. Dann ergibt sich

$$\Delta(x)\, U_0(\xi) = \sum_{\alpha=0}^{s'} \Delta_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\{(x-\xi)^r F(x,\xi)\}. \tag{23}$$

Wegen (19) ist $\alpha \leqq s' \leqq s < n < r$; also $r - \alpha > 0$.

$U_0(y)$ ist vom Grade $s < d$, verschwindet also für $y = \xi$ nicht. Die Gleichung (23) lehrt nun, daß $\Delta(x)$ durch $(x-\xi)^{r-s'}$ teilbar ist. Es bedeute

$$\varphi(x) = x^d + \ldots = 0$$

die in P irreduzible Gleichung für ξ. $\Delta(x)$ ist in P rational; daher geht $\varphi(x)^{r-s'}$ in $\Delta(x)$ auf:

$$\Delta(x)\, U_0(\xi) = \varphi(x)^{r-s'} D(x), \tag{24}$$

wo $D(x)$ nicht identisch 0 ist.

In der Zeile α von $\Delta(x)$ hat jedes Element den Grad $m + r - \alpha$. $\Delta(x)$ hat also den Grad

$$\sum_{\alpha=0}^{s'} (m + r - \alpha) = (s'+1)\left(m + r - \frac{s'}{2}\right) \leqq (s'+1)(m+r).$$

Den wahren Grad von $D(x)$ nenne ich δ; dann ist nach (24)

$$\delta \leqq (s'+1)(m+r) - d(r-s').$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(\eta) \neq 0$. $\Delta(x)$ verschwindet also für $x = \eta$ höchstens von δ-ter Ordnung. Ich kann daher ein γ so wählen, daß $0 \leqq \gamma \leqq \delta$ und $\Delta^{(\gamma)}(\eta) \neq 0$ ist. Für dieses γ gilt nach (7)

$$\gamma \leqq \delta \leqq (s'+1)(m+r) - d(r-s') \leqq (s+1)\frac{d+\vartheta}{s+1} r - dr + ds' \leqq \vartheta r + ds \leqq \vartheta r + n(n-1).$$

[10]) Ist $s' = 0$, so bedeute $\Delta_0(x)$ die Zahl 1.

Hilfssatz VII. $\mathsf{P}, \xi, \vartheta, m, n_0, r, s, c_1, R(x, y)$ haben die Bedeutung Hilfssatzes V. Es sei ζ eine algebraische Zahl vom Grade $t \geqq 1$. Die Ω irreduzible Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten, lcher sie genügt, sei

$$\chi(z) = l_0 z^t + \ldots + l_t = 0 \qquad (l_0 > 0).$$

Ich setze

$$H(\zeta) = \max(|l_0|, \ldots |l_t|) = l.$$

Dann gibt es ein positives $c_{14} = c_{14}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$ derart, daß für $l > c_{14}^r$ Polynom $R(x, \zeta)$ nicht identisch 0 ist.

Beweis. 1. Es sei $t > n_0 s$.

$R(x, y)$ ist in y vom Grade s. $R(x, \zeta)$ ist nicht identisch 0; denn ist würde ζ in P einer Gleichung vom Grade $s < \frac{t}{n_0}$, also in Ω einer eichung vom Grade $n_0 s < t$ genügen. Dies gilt für jedes $l > 0$.

2. Es sei $t \leqq n_0 s$.

Sind $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(t)}$ zu ζ in bezug auf Ω konjugiert, so ist

$$l_0 \prod_{\nu=1}^{t} (y - \zeta^{(\nu)}) = l_0 y^t + \ldots + l_t.$$

setze $\overline{|\zeta|} = \mathsf{Z}$. Der Koeffizient von $y^{t-\lambda}$ in $l_0(y + \mathsf{Z})^t$ ist nicht iner als $|l_\lambda|$:

$$l_0 \binom{t}{\lambda} \mathsf{Z}^\lambda \geqq |l_\lambda|.$$

n sei λ insbesondere derjenige Index der Reihe 0 bis t, für welchen $|l_\lambda|$ nen größten Wert l annimmt; dann ist wegen $\binom{t}{\lambda} < 2^t$

$$l_0 2^t \mathsf{Z}^\lambda > l,$$

, wenn $\max(1, \mathsf{Z}) = \mathsf{Z}'$ gesetzt wird,

$$(2\mathsf{Z}')^t > \frac{l}{l_0}.$$

Ich nehme an: $R(x, \zeta)$ verschwindet identisch. Das Produkt der zu $R(x, y)$ konjugierten Polynome, die Norm $N(R(x, y))$, hat ganze onale Koeffizienten und verschwindet für $y = \zeta$, ist daher durch $\chi(y)$ bar. Setzt man

$$N(R) = \sum_{\varkappa=0}^{n_0(m+r)} b_\varkappa(y) x^\varkappa,$$

ist auch für jedes $\varkappa$ das Polynom $\chi(y)$ ein Teiler von $b_\varkappa(y)$. Es sei

$$b(y) = g_0 y^\sigma + \ldots + g_\sigma \qquad (g_0 \neq 0,\ 0 \leqq \sigma \leqq n_0 s)$$

ein nicht identisch verschwindendes von den Polynomen $b_\varkappa(y)$. Nach einem Satze von Gauß hat das Polynom $\frac{b(y)}{\chi(y)}$ ganze Koeffizienten; insbesondere ist $\frac{g_0}{l_0}$ ganz rational; also

$$l_0 \leqq |g_0|. \tag{26}$$

Die n_0 Konjugierten zu $R(x, y)$ haben je $(m+r+1)(s+1)$ Koeffizienten, deren jeder nach (9) absolut $< c_1^r$ ist. Jeder Koeffizient in ihrem Produkt ist daher absolut $< (m+r+1)^{n_0-1}(s+1)^{n_0-1} c_1^{n_0 r} < c_{15}^r$; also ist auch

$$\max(|g_0|, \ldots |g_\sigma|) = g < c_{15}^r. \tag{27}$$

Wegen $t \leqq \sigma$ ist $\sigma \geqq 1$. Ist $|y| > \sigma \frac{g}{|g_0|}$, also > 1, so gilt

$$|b(y)| \geqq |g_0 y^\sigma| - g(|y|^{\sigma-1} + \ldots + 1) \geqq |g_0 y^{\sigma-1}| \left(|y| - \sigma \frac{g}{|g_0|}\right) > 0.$$

Daher folgt aus $b(\zeta) = 0$ wegen (26)

$$Z' \leqq \sigma \frac{g}{|g_0|} \leqq \sigma \frac{g}{l_0},$$

und wegen (25) und (27)

$$\frac{l}{l_0} < \left(2\sigma \frac{c_{15}^r}{l_0}\right)^t,$$

$$l_0^{t-1} l < (2\sigma c_{15}^r)^t \leqq (2 n_0 s c_{15}^r)^{n_0 s} < c_{14}^r.$$

Nun ist $l_0 \geqq 1$, also a fortiori

$$l < c_{14}^r.$$

Für $l > c_{14}^r$ kann daher $R(x, \zeta)$ nicht identisch verschwinden.

Hilfssatz VIII. $P, \xi, \vartheta, m, n, r, s, c_3, R(x, y)$ haben die Bedeutung des Hilfssatzes V. c_{14} sei die Konstante des vorigen Hilfssatzes VII. Für r und ϑ seien die Ungleichungen (19) und (20) des Hilfssatzes VI erfüllt.

Es sei η eine algebraische Zahl t-ten Grades $(t \geqq 1)$, die von den zu ξ in bezug auf Ω Konjugierten verschieden ist. Sie genüge der in Ω irreduziblen Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten

$$\psi(y) = k_0 y^t + \ldots + k_t = 0 \qquad (k_0 > 0);$$

und es werde gesetzt

$$H(\eta) = \max(|k_0|, \ldots |k_t|) = k.$$

Es sei ζ eine algebraische Zahl t-ten Grades. Sie genüge der in Ω irreduziblen Gleichung mit teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten

$$\chi(z) = l_0 z^t + \ldots + l_t = 0 \qquad (l_0 > 0).$$

Höhe erfülle die Bedingung

$$H(\zeta) = \max(|l_0|, \ldots |l_t|) = l > c_{14}^r.$$

Der Körper $\mathsf{P}(\eta, \zeta)$ sei vom Grade t'.

Behauptung. Es gibt ein ϱ des Intervalls $0 \leqq \varrho < \vartheta r + n^2$, also (19) und (20) $< r$, und ein positives $c_{16} = c_{16}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$ derart, daß der Zahlen

$$E_1 = c_{16}^{t'r}(k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}} |\xi - \eta|^{r-\varrho}, \quad E_2 = c_{16}^{t'r}(k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}} |\xi - \zeta|$$

er als 1 ist.

Beweis. Wegen $l > c_{14}^r$ ist nach Hilfssatz VII $R(x, \zeta)$ nicht iden- 0. Nun war

$$R(x, \zeta) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}(x) U_\beta(\zeta);$$

estens ein $U_\beta(\zeta)$ ist also $\neq 0$. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß für $\beta = 0$ zutrifft. Aus den $s'+1$ Gleichungen

$$\alpha!\, R_\alpha(x, \zeta) = \sum_{\beta=0}^{s'} f_{\lambda_\beta}^{(\alpha)}(x) U_\beta(\zeta) \qquad (\alpha = 0, \ldots s')$$

$$\Delta(x) U_0(\zeta) = \sum_{\alpha=0}^{s'} \Delta_\alpha(x)\, \alpha!\, R_\alpha(x, \zeta).$$

Die Voraussetzung des Hilfssatzes VI ist für η erfüllt. Für das dort nmte $\gamma \leqq \vartheta r + n(n-1)$ ist $\Delta^{(\gamma)}(\eta) \neq 0$. Nach (28) setzt sich $\eta)$ homogen und linear aus $R_\varkappa(\eta, \zeta)$ $(\varkappa = 0, \ldots \gamma + s')$ zusammen. dieser Zahlen ist daher $\neq 0$; und für den zugehörigen Index $\varkappa = \varrho$

$$\varrho \leqq \gamma + s' < \vartheta r + n(n-1) + n = \vartheta r + n^2 \leqq r.$$

Die Konjugierten zu η und ζ in bezug auf Ω seien $\eta^{(\varkappa)}$ und $\zeta^{(\lambda)}$ $1, \ldots t$; $\lambda = 1, \ldots t$). $R_\varrho(x, y)$ ist ein Polynom vom Grade $m + r - \varrho$ s in y, mit ganzen Koeffizienten aus P. Die Norm der Zahl $, \zeta)$ in bezug auf Ω, die ich kurz $N(\eta, \zeta)$ nenne, ist eine Summe Potenzprodukten der $\eta^{(\varkappa)}$ und $\zeta^{(\lambda)}$ mit ganzen Koeffizienten aus P, war tritt in einem solchen Produkt ein Faktor $\eta^{(\varkappa)}$ oder $\zeta^{(\lambda)}$ höchstens r Potenz $\frac{t'}{t}(m + r - \varrho)$ oder $\frac{t'}{t} s$ auf.

Bedeuten $\eta_1, \eta_2, \ldots$ einige verschiedene der Zahlen $\eta^{(\varkappa)}$, so ist nach zahlentheoretischen Satze $k_0 \eta_1 \eta_2 \ldots$ eine ganze algebraische Zahl, be gilt von $l_0 \zeta_1 \zeta_2 \ldots$, wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ verschiedene Zahlen $\zeta^{(\lambda)}$ be- n. Folglich ist $k_0^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)} l_0^{\frac{t'}{t} s} |N(\eta, \zeta)|$ eine ganze algebraische Zahl.

Andererseits ist $|N(\eta, \zeta)|$ eine positive rationale Zahl. Daraus folg

$$(k_0^{m+r-\varrho} l_0^s)^{\frac{t'}{t}} |N(\eta, \zeta)| \geqq 1. \tag{30}$$

Die Konjugierten in bezug auf Ω von $R_\varrho(\eta, \zeta)$ seien $\{R_\varrho(\eta, \zeta)\}$ $(\nu = 1, \ldots t')$; insbesondere sei $\{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(1)} = R_\varrho(\eta, \zeta)$, sowie ferne $\eta^{(1)} = \eta$, $\zeta^{(1)} = \zeta$. Dann ist nach (30), wenn Gleichung (13) benutzt wird

$$(k_0^{m+r-\varrho} l_0^s)^{\frac{t'}{t}} |(\eta-\xi)^{r-\varrho} F_\varrho(\eta, \zeta) + (\zeta-\xi) G_\varrho(\eta, \zeta)| \Big| \prod_{\nu=2}^{t'} \{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(\nu)} \Big| \tag{31}$$

Mit Rücksicht auf die Abschätzungen (14) ist nun wegen $\varrho < r$

$$|(\eta-\xi)^{r-\varrho} F_\varrho(\eta, \zeta) + (\zeta-\xi) G_\varrho(\eta, \zeta)|$$
$$< c_2^r (|\eta-\xi|^{r-\varrho} + |\zeta-\xi|)(1+|\eta|)^{m+r-\varrho}(1+|\zeta|)$$

$$\Big| \prod_{\nu=2}^{t'} \{R_\varrho(\eta, \zeta)\}^{(\nu)} \Big|$$

$$< c_2^{(t'-1)r} \{(1+|\eta|)^{m+r-\varrho}(1+|\zeta|)^s\}^{\frac{t'}{t}-1} \prod_{\nu=2} \{(1+|\eta^{(\nu)}|)^{m+r-\varrho}(1+|\zeta^{(\nu)}|)^s\}^{\frac{t}{t}}$$

so daß (31) übergeht in

$$c_2^{t'r}(|\eta-\xi|^{r-\varrho} + |\zeta-\xi|)\Big\{k_0 \prod_{\nu=1}^{t}(1+|\eta^{(\nu)}|)\Big\}^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)}\Big\{l_0 \prod_{\nu=1}^{t}(1+|\zeta^{(\nu)}|)\Big\}^{\frac{t'}{t}s} > 1$$

Hieraus folgt nach Hilfssatz I

$$c_2^{t'r}(|\eta-\xi|^{r-\varrho} + |\zeta-\xi|)(6^t k)^{\frac{t'}{t}(m+r-\varrho)}(6^t l)^{\frac{t'}{t}s} > 1;$$

folglich ist für ein gewisses positives $c_{16} = c_{16}(\xi, \mathsf{P}, \vartheta)$

$$c_{16}^{t'r}(k^{m+r-\varrho} l^s)^{\frac{t'}{t}}(|\eta-\xi|^{r-\varrho} + |\zeta-\xi|) > 2,$$

woraus die Behauptung sich ergibt.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich zum

Beweis des Hauptsatzes. 1. Es liege Teil 1 des Hauptsatzes vor. Dann bedeute der Körper P vom Grade n_0 des Hilfssatzes V den Körper K_ϱ dessen Grad h sei; so daß $n_0 = h$ ist. Unter h' verstehe ich die Zahl 1

2. Es liege Teil 2 des Hauptsatzes vor. Dann bedeute der Körper P des Hilfssatzes V den Körper der rationalen Zahlen Ω, so daß $n_0 = 1$ $d = n$ ist. Unter h' verstehe ich die Zahl h.

Führe ich die Abkürzung

$$\beta = h'\left(\frac{d}{s+1} + s\right) + \Theta \tag{32}$$

so lassen sich die Ungleichungen (5) und (6) zu

$$|\xi - \eta| \leqq \frac{1}{H(\eta)^{\beta}}$$

nigen. Im folgenden wird der Beweis für beide Teile des Haupt-s zugleich geführt; um zum ersten Teil zu gelangen, hat man also 1 zu setzen, während man zum zweiten Teil durch die Annahme $h,\ d = n$ kommt. Es genügt offenbar, $\Theta \leqq 1$ anzunehmen.
Ich setze

$$\vartheta = \frac{\Theta}{4hn}.$$

abe die zu diesem ϑ gehörige Bedeutung im Sinne des letzten Hilfs-s VIII. Es sei

$$c_{16}^{hh'} = j.$$

Ich nehme an: Die Ungleichung (33) hat unendlich viele Lösungen. wähle ich eine Lösung η folgendermaßen: Es ist η von den zu ξ in g auf Ω Konjugierten verschieden und es gilt

$$H(\eta) = k > \max(j^{\frac{4}{\Theta}}, c_{14}),$$

$_{14}$ die Konstante des Hilfssatzes VII bedeutet. Eine zweite Lösung ζ (33) bestimme ich hierauf derart, daß

$$H(\zeta) = l > k^{\frac{8hn^3}{\Theta}+1}$$

Ich setze

$$r = \left[\frac{\log l}{\log k}\right];$$

sind, so behaupte ich, für η und ζ alle Voraussetzungen des Hilfs-s VIII erfüllt. Es ist nämlich wegen (34) $\vartheta < \frac{1}{2}$, also (20) erfüllt; n (36) und (37)

$$r \geqq \left[\frac{8hn^3}{\Theta}+1\right] > \frac{8hn^3}{\Theta} > 2n^2,$$

(19) erfüllt; η von den zu ξ in bezug auf Ω Konjugierten verschieden; wegen (35) und (37) die Ungleichung $l > c_{14}^r$ erfüllt. Der Grad t' Körpers $\mathsf{P}(\eta, \zeta)$ von Hilfssatz VIII ist im vorliegenden Falle $\leqq hh'$; dem Hilfssatz ist also mindestens eine der Zahlen

$$\overline{E}_1 = j^r (k^{m+r-\varrho} l^s)^{h'} |\xi - \eta|^{r-\varrho}, \quad \overline{E}_2 = j^r (k^{m+r-\varrho} l^s)^{h'} |\xi - \zeta|$$

r als 1.
Zur Abkürzung werde gesetzt

$$\Theta - h' \frac{\vartheta}{s+1} - (\beta - h') \frac{\varrho}{r} - \frac{\log j}{\log k} = \varepsilon.$$

Dann ist nach (29), (34) und (38)

$$\frac{\varrho}{r} < \vartheta + \frac{n^2}{r} < \frac{\Theta}{4hn} + \frac{n^2}{\frac{8hn^3}{\Theta}} = \frac{3\Theta}{8hn};$$

ferner nach (32)

$$\beta - h' = h'\left(\frac{d}{s+1} + s - 1\right) + \Theta \leqq h\left(\frac{n}{s+1} + s - 1\right) + 1 \leqq h\left(\frac{n}{s+1} + s\right) \leqq hn$$

Wegen (34) und (35) ist

$$(40) \quad \varepsilon > \Theta - h\frac{\frac{\Theta}{4hn}}{2} - \frac{3\Theta}{8hn}hn - \frac{\Theta}{4} = \Theta - \frac{\Theta}{8n} - \frac{3\Theta}{8} - \frac{\Theta}{4} > \frac{\Theta}{4} > 0.$$

Wegen $\log j \geqq 0$, $\varrho < r$ ist

$$(41) \quad 0 < h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right) + \frac{\log j}{\log k} = \beta + h'\left(\frac{\vartheta}{s+1} - s\right) - \Theta - h'\frac{\varrho}{r}$$

$$+ \frac{\log j}{\log k} = \beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h's - \varepsilon,$$

also nach (40)

$$(42) \quad r \leqq \frac{\log l}{\log k} < \frac{\log l}{\log k}\frac{\beta - h's}{\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h's - \varepsilon} = \frac{(\beta - h's)\log l}{\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)h'\log k + \log j}.$$

Die Beziehung (41) liefert

$$\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right) - \frac{\log j}{\log k} = h's + \varepsilon > 0;$$

also, nach (37), (38) und (40),

$$(43) \quad r > \frac{\log l}{\log k} - 1 = \frac{\log l}{\log k}\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + \frac{\log l}{\log k}\frac{\frac{\Theta}{4}}{h's + \frac{\Theta}{4}} - 1$$

$$> \frac{\log l}{\log k}\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + \frac{8hn^3}{\Theta}\frac{\Theta}{4hn} - 1 = \frac{\log l}{\log k}\frac{h's}{h's + \frac{\Theta}{4}} + 2n^2 - 1 > \frac{\log l}{\log k}\frac{h's}{h's + \varepsilon}.$$

Aus (42) und (43) folgt

$$\frac{h's\log l}{\left\{\beta\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) - h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)\right\}\log k - \log j} < r < \frac{(\beta - h's)\log l}{h'\left(\frac{d+\vartheta}{s+1} - \frac{\varrho}{r}\right)\log k + \log j},$$

wo beide Nenner als positiv nachgewiesen waren. Wegen (7) ist daher

$$h's\log l < \{\beta(r - \varrho) - h'(m + r - \varrho)\}\log k - r\log j,$$

---

[11]) Die Funktion $f(u) = \frac{n}{u+1} + u$ $(u > 0)$ ist außerhalb ihres Minimums bei $u = \sqrt{n} - 1$ monoton; dieses liegt im Intervall $0 \leqq u \leqq n - 1$. Für alle Punkte dieses Intervalls ist daher $f(u) \leqq f(0) = f(n-1) = n$.

$$h'(m+r-\varrho)\log k + r\log j < (\beta - h's)\log l;$$

$$j^r(k^{m+r-\varrho}l^s)^{h'}\frac{1}{k^{\beta(r-\varrho)}} < 1, \qquad j^r(k^{m+r-\varrho}l^s)^{h'}\frac{1}{l^\beta} < 1;$$

wegen (33) und (39)

$$\overline{E}_1 < 1, \qquad \overline{E}_2 < 1,$$

ein Widerspruch ist.

Zusätze. 1. Wegen des Θ im Exponenten läßt der Hauptsatz auch ende (völlig gleichbedeutende) Fassung zu: Für jedes $A > 0$ hat die leichung

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{A}{H(\eta)^{\frac{d}{s+1}+s+\Theta}},$$

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{A}{H(\eta)^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}$$

endlich viele Lösungen.

2. Es gibt ein positives $A_0 = A_0(\xi, K_0, \Theta)$, resp. $A_0 = A_0(\xi, h, \Theta)$, aß (5a), resp. (6a) für $A = A_0$ keine Lösung hat.

3. Der Hauptsatz gilt auch für gebrochene ξ. Es gibt nämlich eine nur von ξ abhängige natürliche Zahl c_{17}, so daß $c_{17}\,\xi$ ganz ist. ererseits ist offenbar $H(c_{17}\,\eta) \leqq c_{17}^h H(\eta)$. Zusatz 1, auf $|c_{17}\,\xi - c_{17}\,\eta|$ wendet, liefert die Behauptung.

4. Der zweite Teil des Hauptsatzes läßt folgende Erweiterung zu: Es seien h und s zwei natürliche Zahlen, von denen $s < n$ ist. $\eta \neq 0$ Wurzel einer Gleichung h-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffi- en. k (> 0) sei der größte dieser Koeffizienten, absolut genommen. also eine algebraische Zahl $\neq 0$ vom Grade $\leqq h$.

Behauptung. Für jedes $\Theta > 0$ hat die Ungleichung

$$0 < |\xi - \eta| \leqq \frac{1}{k^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}$$

endlich viele Lösungen η.

Beweis. Bei festem η kann (44) offenbar nur für endlich viele k n. Nach Hilfssatz III ist ferner $H(\eta) < \tau_1 k$, wo τ_1 nur von h ab- t. Hätte also (44) unendlich viele Lösungen, so gälte dasselbe von Ungleichung der Form (6a), was nicht sein kann.

Hilfssatz X. Durchläuft x die natürlichen Zahlen, so hat die Funk- $y = \frac{d}{x+1} + x$ für $x = \left[\frac{\sqrt{4d+1}-1}{2}\right]$ ihren kleinsten Wert. Er liegt m Intervall $2\sqrt{d} - 1 \leqq y \leqq \sqrt{4d+1} - 1$.

Beweis. Lasse ich beliebige positive x zu, so folgt aus

$$y' = -\frac{d}{(x+1)^2} + 1, \qquad y'' = \frac{2d}{(x+1)^3} > 0,$$

daß y für $0 < x < \sqrt{d} - 1$ monoton fällt, für $\sqrt{d} - 1 < x$ monoton wächst und in $x = \sqrt{d} - 1$ das Minimum $2\sqrt{d} - 1$ annimmt.

Es sei

$$x_1 > \sqrt{d} - 1, \qquad x_2 = \frac{d}{x_1 + 1} - 1. \tag{48}$$

In x_1 und x_2 hat y denselben Wert. In keinem Punkte des Intervalls $x_2 < x \leqq x_1$ ist daher y größer als in irgendeinem außerhalb desselben gelegenen $x > 0$. Ist nun

$$x_1 - x_2 = 1, \tag{49}$$

so gibt es in diesem Intervall genau eine natürliche Zahl $s = [x_1]$. Für jedes natürliche $x \neq s$ gilt dann $y \geqq \frac{d}{s+1} + s$.

Aus (48) und (49) folgt

$$\frac{d}{x_1 + 1} = x_1, \qquad x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{4d+1} - 1), \qquad s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4d+1} - 1)\right].$$

Ferner ist

$$\frac{d}{s+1} + s \leqq \frac{d}{x_1 + 1} + x_1 = 2x_1 = \sqrt{4d+1} - 1,$$

so daß die Ungleichung

$$2\sqrt{d} - 1 \leqq \frac{d}{s+1} + s \leqq \sqrt{4d+1} - 1$$

gilt.

§ 2.

Satz 2. Es bedeute ξ eine algebraische Zahl vom Grade $d \geqq 2$ in bezug auf den Körper K_0. Es sei $\omega_1, \ldots \omega_h$ eine feste Basis von K_0. Unter $x_1, \ldots x_h, x_1', \ldots x_h'$ verstehe ich $2h$ ganze rationale Unbestimmte, die nicht sämtlich 0 sind. Das Maximum ihrer absoluten Beträge sei x (> 0).

Dann hat die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x_1 \omega_1 + \ldots + x_h \omega_h}{x_1' \omega_1 + \ldots + x_h' \omega_h} \right| \leqq \frac{1}{x^{h\left(\frac{d}{s+1} + s\right) + \Theta}} \tag{50}$$

nur endlich viele Lösungen.

Beweis. $\eta = \frac{x_1 \omega_1 + \ldots + x_h \omega_h}{x_1' \omega_1 + \ldots + x_h' \omega_h}$ ist Wurzel der Gleichung

$$P(t) = \prod_{\nu=1}^{h} \{(x_1' \omega_1^{(\nu)} + \ldots + x_h' \omega_h^{(\nu)})\, t - (x_1 \omega_1^{(\nu)} + \ldots + x_h \omega_h^{(\nu)})\} = 0, \tag{51}$$

das Produkt über alle Konjugierten erstreckt wird. $P(t)$ hat die Form

$$P(t) = a(Q(t))^f \qquad (a \neq 0),$$

Q ein irreduzibles ganzrationalzahliges Polynom, a eine ganze rationale , f eine natürliche Zahl $\leqq h$ bedeuten. Es sei ω die größte der Zahlen $|\omega_1^{(1)}|, \ldots |\omega_h^{(h)}|$ und k_λ der Koeffizient von $t^{\frac{h}{f}-\lambda}$ in $Q(t)$; dann nach (51) und (52) für $\lambda = 0, \ldots \frac{h}{f}$

$$|k_\lambda| \leqq \binom{\frac{h}{f}}{\lambda} (h\omega)^{\frac{h}{f}} x^{\frac{h}{f}} \leqq \binom{h}{\lambda} (h\omega)^h x^{\frac{h}{f}},$$

$$k = \max(|k_0|, \ldots |k_{\frac{h}{f}}|) < \tau_3 x^{\frac{h}{f}},$$

$\tau_3 > 0$ nur von der gegebenen Basis abhängt. η liegt in einem der ich vielen verschiedenen Unterkörper von K_0 vom Grade $\frac{h}{f}$ und ist n primitiv; in jedem derselben hat nach dem Hauptsatz die Ungleichung

$$|\xi - \eta| < \frac{1}{k^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}}$$

endlich viele Lösungen, wenn d' den Grad von ξ in bezug auf den rkörper und s' die Zahl $[\frac{1}{2}(\sqrt{4d'+1}-1)]$ bedeuten; hierin ist $\leqq fd$. Dasselbe gilt a fortiori von

$$|\xi - \eta| < \frac{1}{\left(\tau_3 x^{\frac{h}{f}}\right)^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}} = \frac{1}{x^{\frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)+\Theta}} \cdot \frac{x^{\frac{\Theta}{2}}}{\tau_3^{\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}}}.$$

ist für $f \geqq 2$ nach Hilfssatz X

$$\left(\frac{d}{s+1}+s\right) \geqq \frac{h}{f} f(2\sqrt{d}-1) > \frac{h}{f}\left(2\sqrt{df}-\frac{1}{2}\right) > \frac{h}{f}(\sqrt{4df+1}-1)$$
$$\geqq \frac{h}{f}(\sqrt{4d'+1}-1) \geqq \frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right);$$

die Ungleichung

$$h\left(\frac{d}{s+1}+s\right) \geqq \frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)$$

uch für $f = 1$ richtig. Daher gilt

$$\frac{1}{x^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)}} \leqq \frac{1}{x^{\frac{h}{f}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'\right)}}.$$

Hätte nun (50) unendlich viele Lösungen, so wäre für diese mi endlich vielen Ausnahmen

$$x > \tau_3^{\frac{2}{\Theta}\left(\frac{d'}{s'+1}+s'+\frac{\Theta f}{2h}\right)};$$

dann lieferten aber (53) und (54) einen Widerspruch.

Satz 3. Es sei ξ eine algebraische Zahl n-ten Grades.

Die Ungleichung

$$0 < |k_0\xi^h + k_1\xi^{h-1} + \ldots + k_h| \leqq \frac{1}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\Theta}} \tag{55}$$

$$(\max(|k_0|, \ldots |k_h|) = k > 0)$$

hat nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen $k_0, k_1, \ldots, k_h$.

Beweis. Es genügt, $k_0 > 0$ anzunehmen.

Ich setze

$$x^h + \frac{k_1}{k_0}x^{h-1} + \ldots + \frac{k_h}{k_0} = \prod_{\nu=1}^{h}(x - \eta^{(\nu)}).$$

Nach Zusatz 2 zum Hauptsatz gibt es ein positives $A_0 = A_0(\xi, h, \Theta)$, so daß für jedes algebraische $\eta \neq \xi$ vom Grade $\leqq h$

$$|\xi - \eta| > \frac{A_0}{k^{h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2h}}} \tag{56}$$

gilt.

Von den h Zahlen $|\eta^{(1)}|, \ldots |\eta^{(h)}|$ sei $|\eta^{(1)}|$ die größte.

1. Es sei

$$\frac{k}{k_0} > (|\xi| + 2)^h.$$

Dann ist wegen

$$\frac{k}{k_0} = \max_{\nu=0,\ldots h}\left|\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_\nu}\eta^{(i_1)}\eta^{(i_2)}\ldots\eta^{(i_\nu)}\right| \leqq (1 + |\eta^{(1)}|)^h,$$

$$|\xi| + 2 < 1 + |\eta^{(1)}|,$$

$$|\xi - \eta^{(1)}| \geqq |\eta^{(1)}| - |\xi| > 1.$$

Nach (56) ist

$$\prod_{\nu=2}^{h}|\xi - \eta^{(\nu)}| > \frac{A_0^{h-1}}{k^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{(h-1)\Theta}{2h}}},$$

$$|k_0\xi^h + \ldots + k_h| = k_0\prod_{\nu=1}^{h}|\xi - \eta^{(\nu)}| > \frac{k_0 A_0^{h-1}}{k^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}},$$

, wegen $k_0 \geqq 1$ und $h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)>1$

$$|k_0\xi^h+\ldots+k_h|>\frac{A_0^{h-1}}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\frac{\Theta}{2}}}.$$

2. Es sei

$$\frac{k}{k_0}\leqq(|\xi|+2)^h.$$

n ist, wenn (56) für alle $\eta^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots h)$ benutzt wird,

$$|k_0\xi^h+\ldots+k_h|>\frac{k_0A_0^h}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}}\geqq\frac{\left(\frac{A_0}{|\xi|+2}\right)^h}{k^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-1+\frac{\Theta}{2}}}.$$

Aus (57) und (58) folgt, daß für hinreichend großes k (55) nicht r gelten kann.

Anmerkung. Satz 3 ist trivial, wenn $h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)\geqq n$ ist. Ist lich $k_0\xi^h+\ldots+k_h\neq 0$, so folgt aus $|N(k_0\xi^h+\ldots+k_h)|\geqq 1$ Existenz eines positiven $c=c(\xi,h)$, so daß

$$|k_0\xi^h+\ldots+k_h|>\frac{c}{k^{n-1}}.$$

gen $\frac{n}{s+1}+s<2\sqrt{n}$ ist die Ungleichung $h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)<n$ für $h\leqq\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ er erfüllt.

Satz 3 besagt, etwas weniger scharf ausgedrückt: Für alle $k_0,\ldots k_h$, endlich vielen Ausnahmen, gilt

$$|k_0\xi^h+\ldots+k_h|>\frac{1}{(k_0^2+\ldots+k_h^2)^{h^2\sqrt{n}}},$$

n die linke Seite $\neq 0$ ist.

Jetzt sei speziell $k_0=g$ eine natürliche Zahl und $h=2$, $n>2$. betrachte die lineare Funktion der beiden ganzen rationalen Veränder- en x, y

$$L(x,y)=g\xi^2+x\xi+y.$$

ei $g|\xi|^2+|\xi|+1=B$. Ist $x=0$, so ist für höchstens zwei Werte y die Funktion $|L(x,y)|<1$; ist $x\neq 0$, so ist

$$|L(x,y)|\geqq|y|-(g|\xi|^2+|x\xi|+1)+1\geqq|y|-B|x|+1;$$

$|L(x,y)|\leqq 1$ folgt dann $|y|\leqq B|x|$, also (wegen $B>1$)

$$\max(|x|,|y|)\leqq B|x|.$$

alle Paare x, y mit Ausnahme endlich vieler gilt nun

$$k=\max(g,|x|,|y|)>(|\xi|+2)^2g;$$

also nach dem ersten Teil des Beweises von Satz 3

$$|L(x,y)| > \frac{A_0 g}{\max(g,|x|,|y|)^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}} > \frac{A_0 g}{(B|x|)^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\frac{\Theta}{2}}}$$

für hinreichend großes $|x|$; also auch für großes $|x|$

$$|g\xi^2 + x\xi + y| > \frac{1}{|x|^{2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}.$$

Als weitere Anwendung von Satz 3 suche ich eine Abschätzung für $x\cos\frac{2\pi a}{b} + y\sin\frac{2\pi a}{b} + z$, wo $\frac{a}{b}$ ein fester reduzierter Bruch und x, y, z drei ganze rationale Zahlen sind.

Man hat

$$\left(x\cos\frac{2\pi a}{b} + y\sin\frac{2\pi a}{b} + z\right)\left(x\cos\frac{2\pi a}{b} - y\sin\frac{2\pi a}{b} + z\right)$$
$$= (x^2+y^2)\cos^2\frac{2\pi a}{b} + 2xz\cos\frac{2\pi a}{b} + z^2 - y^2.$$

Nun ist $\cos\frac{2\pi a}{b}$ eine algebraische Zahl vom Grade $\frac{1}{2}\varphi(b)$ [15]) für $b > 2$; ferner ist

$$\max(|x^2+y^2|, |2xz|, |z^2-y^2|) \leqq x^2+y^2+x^2+z^2+z^2+y^2$$
$$= 2(x^2+y^2+z^2).$$

Wird $\varphi(b) > 4$ vorausgesetzt, was für alle $b > 12$ der Fall ist, so ist nach Satz 3 für großes $x^2+y^2+z^2$

$$\left|(x^2+y^2)\cos^2\frac{2\pi a}{b} + 2xz\cos\frac{2\pi a}{b} + z^2 - y^2\right| > \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{2^2\left(\frac{\varphi(b)}{2(s+1)}+s\right)-1+\cdots}}$$

also, wegen

$$\left|x\cos\frac{2\pi a}{b} - y\sin\frac{2\pi a}{b} + z\right| \leqq x^2+y^2+z^2 \text{ und } \frac{\varphi(b)}{2(s+1)} + s < \sqrt{2\varphi(b)},$$

$$\left|x\cos\frac{2\pi a}{b} + y\sin\frac{2\pi a}{b} + z\right| > \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{4\sqrt{2\varphi(b)}}}.$$

Hilfssatz XI. Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Konjugierten der algebraischen Zahl ξ. Ich setze

$$y_\varkappa = x_0\xi_\varkappa^h + \ldots + x_{h-1}\xi_\varkappa + x_h \qquad (\varkappa = 1, \ldots n),$$
$$\max(|x_0|, \ldots |x_h|) = x.$$

Es gibt ein positives $c_{18} = c_{18}(\xi)$, so daß von den n Linearformen $y_\varkappa$ höchstens h absolut $< \frac{x}{c_{18}}$ sind.

---

[15]) φ bedeutet hier die Eulersche φ-Funktion.

Beweis. Der Hilfssatz ist trivial für $h \geqq n$; es sei also $h \leqq n-1$. betrachte irgend $h+1$ von den Linearformen, etwa

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{h} \xi_\varkappa^{h-\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa = 1, \ldots h+1).$$

gen $|\xi_\varkappa^\lambda| \neq 0$ $(\varkappa = 1, \ldots h+1;\ \lambda = 0, \ldots h)$ lassen sich $x_0, \ldots x_h$ als are Funktionen von $y_1, \ldots y_{h+1}$ darstellen. Deren Koeffizienten hängen von $\xi_1, \ldots \xi_{h+1}$ ab und sind daher absolut $< c_{19} = c_{19}(\xi)$. Ich setze $(|y_1|, \ldots |y_{h+1}|) = y$; dann ist

$$x \leqq (h+1)\, c_{19}\, y, \qquad y \geqq \frac{x}{(h+1)\, c_{19}} \geqq \frac{x}{n\, c_{19}}.$$

jeder Kombination von $h+1$ verschiedenen $y_\varkappa$ bestimme ich ein c_{19}; n wähle ich c_{18} derart, daß $c_{18} \geqq n\, c_{19}$ für jeden der endlich vielen te von c_{19} gilt. Dieses c_{18} leistet das Verlangte.

Satz 4. Es sei ξ eine algebraische Zahl n-ten Grades. Es bedeute $_0, \ldots x_h)$ die zerlegbare Form

$$\prod_{\nu=1}^{n} y_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} (x_0 \xi_\nu^h + x_1 \xi_\nu^{h-1} + \ldots + x_h);$$

ei $n > h^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$ und $\psi(x_0, \ldots x_h)$ irgendein Polynom in $x_0, \ldots x_h$ der Dimension $\delta < n - h^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$.

Dann hat die Gleichung

$$\varphi(x_0, \ldots x_h) = \psi(x_0, \ldots x_h)$$

endlich viele Lösungen in ganzen rationalen $x_0, \ldots x_h$.

Beweis. Es genügt, $x_0 \neq 0$ anzunehmen. Es sei

$$0 < \max(|x_0|, \ldots |x_h|) = x,$$

für unbestimmtes u

$$x_0 u^h + x_1 u^{h-1} + \ldots + x_h = x_0 \prod_{\nu=1}^{h} (u - \eta^{(\nu)}).$$

Es gibt eine Zahl $\tau_4 > 0$, die nur von den Koeffizienten von ψ abhängt, aß

$$|\psi(x_0, \ldots x_h)| < \tau_4 x^\delta.$$

Nach Hilfssatz XI sind von den n linearen Formen y_ν mindestens h absolut $\geqq \frac{x}{c_{18}}$. Seien $y_1, \ldots y_\lambda$ sämtliche Linearformen, deren lute Beträge $< \frac{x}{c_{18}}$ sind (falls es solche gibt), dann ist $\lambda \leqq h$ und

$$y_1 \ldots y_\lambda = x_0^\lambda \prod_{\mu=1}^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{h} (\xi_\mu - \eta^{(\nu)}).$$

Es gibt ein $c_{20} > 0$ derart, daß das Minimum unter den absoluten Beträgen der Differenzen der Zahlen $\xi_1, \dots \xi_n$ größer als $\frac{1}{c_{20}}$ ist. Dann sind von den λh Faktoren des Doppelproduktes höchstens h absolut $< \frac{1}{2c_{20}}$ (denn sonst würden für ein gewisses ν zwei Ungleichungen $|\xi_\mu - \eta^{(\nu)}| < \frac{1}{2c_{20}}$, $|\xi_{\mu'} - \eta^{(\nu)}| < \frac{1}{2c_{20}}$ mit $\mu \neq \mu'$ bestehen, was $|\xi_\mu - \xi_{\mu'}| < \frac{1}{c_{20}}$ zur Folge hätte).

Ist die Anzahl jener Faktoren $\leqq h-1$, so folgt nach dem Hauptsatz

$$|y_1 \dots y_\lambda| > \frac{\left(\frac{1}{2c_{20}}\right)^{\lambda h}}{x^{h(h-1)\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}$$

für großes x; ist aber diese Anzahl $= h$, so gilt

$$\max(|\eta_1|, \dots |\eta_h|) < \max(|\xi_1|, \dots |\xi_n|) + \frac{1}{2c_{20}},$$

also

$$\frac{x}{|x_0|} < c_{21},$$

$$|y_1 \dots y_\lambda| > \left(\frac{x}{c_{21}}\right)^{\lambda} \frac{\left(\frac{1}{2c_{20}}\right)^{\lambda h}}{x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)+\Theta}}.$$

Auf jeden Fall ist daher für hinreichend großes x

$$|y_1 \dots y_\lambda| > \frac{1}{c_{22} x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\lambda+\Theta}};$$

$$(61)\quad |\varphi(x_0, \dots x_h)| \geqq \frac{1}{c_{22} x^{h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\lambda+\Theta}} \left(\frac{x}{c_{18}}\right)^{n-\lambda} \geqq \frac{x^{n-h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)-\Theta}}{c_{23}}.$$

Für Θ wähle ich irgendeine positive Zahl $< n - h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right) - \delta$; dann ist nach (60) und (61) für hinreichend großes x

$$|\varphi(x_0, \dots x_h)| > |\psi(x_0, \dots x_h)|.$$

(59) hat also nur endlich viele Lösungen.

Anmerkung. Schon für kleine Werte von h sind diejenigen n, auf welche Satz 4 angewendet werden kann, sehr hoch. Genauer will ich beweisen: Der kleinste Wert von n, für den $n > h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right)$ wird, ist

$$n = 4h^4 - 2h^2 + 1.$$

Setzt man nämlich $n = 4h^4 - 2h^2 + n^*$, so ist für $n^* \geqq 0$ wegen $\frac{n}{s+1} + s \leqq \sqrt{4n+1} - 1$ (nach Hilfssatz X)

$$h^2\left(\frac{n}{s+1}+s\right) \geqq 4h^4-2h^2+n^*-h^2\left(\sqrt{16h^4-8h^2+1+4n^*}-1\right)$$
$$\geqq 4h^4-2h^2+n^*-h^2\left(4h^2-1+\frac{2n^*}{4h^2-1}-1\right)$$
$$= n^*-\frac{2h^2n^*}{4h^2-1} = n^*\frac{2h^2-1}{4h^2-1} \geqq 0,$$

hierin steht das Gleichheitszeichen nur für $n^*=0$.

Als kleinste Gradzahl, für die Satz 4 gilt, gehört also zu $h=1$ $n=3$, 2 $n=57$, $h=3$ $n=307$ usw.

Satz 5. Es sei $U(x,y)$ eine homogene binäre Form d-ten Grades mehrfache Linearfaktoren, deren Koeffizienten einem Körper K_0 vom le h_0 angehören.

1. x und y seien ganzzahlige Variable eines festen Oberkörpers K^* K_0, dessen Grad in bezug auf Ω mit h bezeichnet werde. Es sei

$$d > h\left(\frac{d}{s+1}+s\right) \qquad (s=[\tfrac{1}{2}(\sqrt{4d+1}-1)]).$$

er $V(x,y)$ verstehe ich irgendein Polynom der Dimension $d-h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)$ mit Koeffizienten aus K_0, welches zu $U(x,y)$ rfremd ist.

Behauptung. Die Diophantische Gleichung

$$U(x,y)=V(x,y)$$

nur endlich viele Lösungen.

2. x und y seien irgendwelche ganze algebraische Zahlen vom le $\leqq h$. Es sei

$$d > h^4\left(\frac{dh_0}{s'+1}+s'\right) \qquad (s'=[\tfrac{1}{2}(\sqrt{4dh_0+1}-1)]).$$

er $V(x,y)$ verstehe ich irgendein Polynom der Dimension $d-h^4\left(\frac{dh_0}{s'+1}+s'\right)$ mit Koeffizienten aus K_0, welches zu $U(x,y)$ rfremd ist.

Behauptung. (62) hat nur endlich viele Lösungen. Es gibt also nur endlich viele Zahlkörper des Grades $\leqq h$, in denen diese Glei- g Lösungen in primitiven Zahlen besitzt.

Beweis. Durch eine homogene lineare Transformation der Deter- nte 1 mit ganzen rationalen Koeffizienten läßt sich stets erreichen, in $U(x,y)$ die Koeffizienten von x^d und y^d nicht 0 sind. Ohne Be- inkung der Allgemeinheit kann daher

$$U(x,y)=\alpha y^d\prod_{\nu=1}^{d}\left(\frac{x}{y}-\xi_\nu\right) \qquad (\alpha\neq 0,\ \xi_\nu\neq 0)$$

gesetzt werden. Nach Voraussetzung sind die d Zahlen $\xi_1, \dots \xi_d$ voneinander verschieden; das Minimum ihrer Abstände sei $\frac{1}{\tau_5} > 0$. Von den d Faktoren des Produktes sind dann mindestens $d-1$ absolut $\geqq \frac{1}{2\tau_5}$.

1. Seien $x = \eta$, $y = \zeta \neq 0$ ganze Zahlen aus K^*. Sind $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(h)}$, $\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(h)}$ ihre Konjugierten, so ist $\frac{\eta}{\zeta}$ Wurzel der Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{h} (\zeta^{(\nu)} t - \eta^{(\nu)}) = 0.$$

Deren Koeffizienten sind absolut $< (2Z)^h$, wo Z das Maximum der $2h$ Zahlen $|\eta^{(1)}|, \dots |\zeta^{(h)}|$ bedeutet. Wie beim Beweise von Satz 2 folgt

$$\left| \frac{\eta^{(\lambda)}}{\zeta^{(\lambda)}} - \xi_\nu \right| > \frac{1}{(2Z)^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)+\Theta}} \qquad (\lambda = 1, \dots h;\ \nu = 1, \dots d,$$

für hinreichend großes Z (wenn die linke Seite $\neq 0$ ist; da aber U und V keinen gemeinsamen Faktor haben, so ist dies für Lösungen von (62) mit genügend großem Z sicher der Fall). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$Z = |\zeta_1| = |\zeta|;$$

denn (62) bleibt richtig, wenn alle Größen durch ihre Konjugierten ersetzt werden, und nötigenfalls vertausche man x mit y. Für großes Z ist also

$$|U(\eta, \zeta)| > |\alpha| Z^d \left(\frac{1}{2\tau_5}\right)^{d-1} \frac{1}{(2Z)^{h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)+\Theta}}; \tag{63}$$

andererseits gilt für ein gewisses $\tau_6 > 0$, das nur von den Koeffizienten von $V(x, y)$ abhängt,

$$|V(\eta, \xi)| < \tau_6 Z^\delta. \tag{64}$$

Wählt man ein positives $\Theta < d - h\left(\frac{d}{s+1} + s\right) - \delta$, so ist nach (63) und (64) für hinreichend großes Z

$$|U(\eta, \zeta)| > |V(\eta, \zeta)|.$$

2. Seien $x = \eta$, $y = \zeta \neq 0$ ganze algebraische Zahlen vom Grade $\leqq h$ und $\eta^{(1)}, \dots \eta^{(h_1)}$, $\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(h_2)}$ ihre Konjugierten ($h_1 \leqq h$, $h_2 \leqq h$). $\frac{\eta}{\zeta}$ ist Wurzel der Gleichung $h_1 h_2$-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$\prod_{\mu=1}^{h_1} \prod_{\nu=1}^{h_2} (\zeta^{(\nu)} t - \eta^{(\mu)}) = 0;$$

setzt man $Z = \max(|\eta^{(1)}|, \dots |\zeta^{(h_2)}|)$, so sind ihre Koeffizienten absolut $< (2Z)^{h_1 h_2}$. Wie beim Beweis von Satz 2 liefert der Hauptsatz

$$\left|\frac{\eta^{(\mu)}}{\zeta^{(\nu)}}-\xi_{\varkappa}\right|>\frac{1}{(2Z)^{h_1 h_2 h_1 h_2\left(\frac{d h_0}{s'+1}+s'\right)+\Theta}} \qquad \begin{matrix}(\mu=1,\ldots h_1;\ \nu=1,\ldots h_2;\\ \varkappa=1,\ldots d)\end{matrix}$$

hinreichend großes Z. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann der $Z=|\zeta|$ angenommen werden. Dann ist für großes Z

$$|U(\eta,\zeta)|>|\alpha|\,Z^{d}\left(\frac{1}{2\tau_0}\right)^{d-1}\frac{1}{(2Z)^{h^4\left(\frac{d h_0}{s'+1}+s'\right)+\Theta}}.$$

positives $\Theta<d-h^4\left(\frac{d h_0}{s'+1}+s'\right)-\delta$ folgt aus (64) und (65) für eichend großes Z

$$|U(\eta,\zeta)|>|V(\eta,\zeta)|.$$

Anmerkung. Der kleinste Wert von d, für welchen $d>h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)$ l, ist

$$d=4h^2-2h+1,$$

für $h=1$ $d=3$, $h=2$ $d=13$, $h=3$ $d=31$ usw.

Der kleinste Wert von d, für welchen $d>h^4\left(\frac{d h_0}{s'+1}+s'\right)$ wird, ist

$$d=4h^8h_0-2h^4+1.$$

Zusätze. 1. Bei dem Beweise war nur benutzt worden, daß

$$V(\eta,\zeta)=o\left(Z^{d-h\left(\frac{d}{s+1}+s\right)-\Theta}\right),$$

$=o\left(Z^{d-h^4\left(\frac{d h_0}{s'+1}+s'\right)-\Theta}\right)$ ist. Es gilt also auch allgemeiner: Die Relation

$$U(\eta,\zeta)=O(Z^{\delta}),$$

sich die Abschätzung auf eine Folge wachsender $Z\to\infty$ bezieht, kann t für alle Konjugierten der linken Seite richtig sein.

2. Es sei $\varphi(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $n\geqq 3$ mit nalen Koeffizienten. Sind p und q zwei ganze rationale Zahlen und utet $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, so wird Polynom $R(x)$ vom Grade $n-1$ durch

$$(p-qx)\,P(x)\equiv R(x)\,(\mathrm{mod}\,\varphi(x))$$

eutig bestimmt.

Dann wächst für die Menge aller nicht durch $\varphi(x)$ teilbaren $P(x)$ einem festen Grade ν gleichmäßig der absolut größte Koeffizient von) mit $|pq|$ über alle Grenzen.

Ist nämlich $\varphi(\xi)=0$, so wird wegen (66)

$$N(p-q\xi)\,N(P(\xi))=N(R(\xi));$$

also, da für ein nur von $\varphi(x)$ und von ν abhängiges $\tau_7 > 0$ $|N(P(\xi))| > \frac{1}{\tau_7}$ ist

$$\left|q^n \varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \tau_7 |N(R(\xi))|.$$

Nach Satz 5 wächst der Wert der linken Seite mit $|pq|$ über alle Grenzen dasselbe gilt daher von $|N(R(\xi))|$, also auch von dem absolut größten Koeffizienten von $R(x)$.

Ist $h_0 = h = 1$, so läßt Satz 5 folgende Erweiterung zu:

Satz 6. Es seien $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ und $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ zwei rationale Funktionen in gekürzter Form mit rationalen Koeffizienten, von denen die erstere homogen ist. $P(x,y)$ habe lauter einfache Linearfaktoren und sei zu $M(x,y)$ teilerfremd. Zwischen den Dimensionen n, n', δ von P, Q, M mögen die Ungleichungen

$$(67) \qquad n > 0, \quad 0 \leqq \delta < \frac{(n-n')\left(n - \frac{n}{s+1} - s\right)}{n} \qquad \left(s = \left[\frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}\right]\right)$$

bestehen. Dann besitzt die Diophantische Gleichung

$$(68) \qquad \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen x, y.

Beweis. Der Fall $n' = 0$ wird durch Satz 5 Zusatz 1 erledigt; sei also $n' > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $P, Q, M,$ ganzzahlig.

Es gibt zwei homogene Polynome $A(x,y)$ und $B(x,y)$ von den Graden $n'-1$ und $n-1$ mit ganzen rationalen Koeffizienten und eine natürliche Zahl τ_8, so daß identisch in x und y

$$(69) \qquad A(x,y)P(x,y) + B(x,y)Q(x,y) = \tau_8 y^{n+n'-1}.$$

Aus (68) und (69) folgt für die Lösungen x, y von (68)

$$(70) \qquad P(AM + BN) = \tau_8 y^{n+n'-1} M.$$

Es sei $t = (x,y)$; dann läßt sich setzen

$$x = tx', \quad y = ty', \quad (x', y') = 1.$$

Jedes der beiden Gleichungspaare $P = 0$, $M = 0$ und $M = 0$, $N = 0$ hat nach Voraussetzung nur endlich viele ganze rationale Lösungen x, y; es gibt also ein τ_9, so daß für alle Lösungen von (68) mit $|x| > \tau_9$ die Ungleichungen

$$(71) \qquad P(x,y) \neq 0, \quad |N(x,y)| \geqq 1$$

gelten. Ich setze

$$\max(|x'|, |y'|) = \mu, \qquad \frac{n}{s+1} + s = \gamma,$$

ann ist

72) $$|M(x,y)| < \tau_{10}(\mu t)^{\delta}, \quad |Q(x,y)| < \tau_{11}(\mu t)^{n'};$$

nd nach Satz 5 Zusatz 1 für $|x| > \tau_9$

73) $$|P(x,y)| = t^n |P(x',y')| > \frac{1}{\tau_{12}} t^n \mu^{n-\gamma-\Theta},$$

o $\tau_{12} > 0$ nur von Θ und den Koeffizienten von P abhängt.

Nach (68), (71), (72), (73) ist also

$$\frac{1}{\tau_{12}} t^n \mu^{n-\gamma-\Theta} < \tau_{10}\tau_{11}(t\mu)^{n'+\delta},$$

der, da wegen (67)

$$(n-n')(n-\gamma) - n\delta > 0, \quad n - n' - \delta > 0$$

t,

74) $$t\mu < \tau_{13}\mu^{\frac{\gamma+\Theta}{n-n'-\delta}}.$$

Aus (70) folgt

$$P(x',y')\{A(x',y')M(x,y) + t^{n-n'}B(x',y')N(x,y)\} = \tau_8 y'^{n+n'-1} M(x,y).$$

Wegen $P \neq 0$ ist $M \neq 0$; der absolute Betrag der geschweiften Klammer st $\geqq 1$. Setzt man

$$(P(x',y'), y') = t',$$

o ist

$$0 \equiv P(x',y') \equiv a_0 x'^n + y'(\ldots) \equiv a_0 x'^n \pmod{t'},$$

lso wegen $(x',y') = 1$

$$t' \mid a_0.$$

Daher ist

$$P(x',y') \mid \tau_8 a_0^{n+n'-1} M(x,y).$$

nd nach (74) und (72)

$$|P(x',y')| < \tau_8 |a_0|^{n+n'-1} \tau_{10}(\mu t)^{\delta} < \tau_{14}\mu^{\frac{\delta(\gamma+\Theta)}{n-n'-\delta}}.$$

Also ist nach (73)

$$\mu^{n-\gamma-\Theta} < \tau_{12}\tau_{14}\mu^{\frac{\delta(\gamma+\Theta)}{n-n'-\delta}}$$

75) $$\mu < (\tau_{12}\tau_{14})^{\frac{n-n'-\delta}{(n-\gamma-\Theta)(n-n')-\delta n}},$$

wenn Θ so klein gewählt wird, daß der Nenner des Exponenten > 0 ist, was nach (67) möglich ist. Aus (74) und (75) folgt die Beschränktheit von $|x|$ und $|y|$; die vorgelegte Gleichung hat also nur endlich viele Lösungen.

Anmerkung. Der Spezialfall $M = 1$, $N = 1$ findet sich in einer Arbeit von Thue[16]).

Satz 7. Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper K. x durchlaufe die ganzen Zahlen dieses Körpers. Von den Normen der Primideale aus K, die für ein bestimmtes $x = \vartheta$ in $f(\vartheta)$ aufgehen, sei N_ϑ die größte[17]).

Behauptung. Besitzt $f(x)$ mindestens zwei verschiedene Nullstellen[18]), so liegt nur für endlich viele ϑ die positive Zahl N_ϑ unter einer beliebigen festen Schranke. Anders ausgedrückt: Von den Normen der Primidealteiler von $f(\vartheta)$ wächt die größte mit $|\vartheta|$ über alle Grenzen.

Beweis. Sei $m (\geqq 2)$ der genaue Grad von $f(x)$ und

$$f(x) = cx^m + \ldots \qquad (c \neq 0 \text{ ganz})$$

dann ist für die ganzzahlige Variable $y = cx$

$$c^{m-1} f(x) = y^m + \ldots = f^*(y);$$

es kann also ohne Einschränkung $c = 1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt eine Zerlegung

$$f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) g(x) \tag{76}$$

mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zu K adjungiere ich λ_1 und λ_2; den so entstehenden Oberkörper von K nenne ich $\overline{K}$; sein Relativgrad ist $\leqq m^2$. Bedeutet dabei Zeichen N resp. $\overline{N}$ die in K resp. $\overline{K}$ genommene Form, so ist für ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus K

$$\overline{N}\mathfrak{a} \leqq N\mathfrak{a}^{m^2}, \qquad N\mathfrak{a} \geqq \sqrt[m^2]{\overline{N}\mathfrak{a}}.$$

Der Satz braucht also nur für x in $\overline{K}$ (nebst $\overline{N}$ statt N) bewiesen zu werden; d. h. ich kann $K = \overline{K}$ voraussetzen. Ferner genügt es, die Behauptung für den Teiler $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ von $f(x)$ nachzuweisen. Ersetzt man endlich noch $x - \lambda_1$ durch x, $\lambda_2 - \lambda_1$ durch α, so kann man $f(x)$ in der Form

$$f(x) = x(x - \alpha) \qquad (\alpha \neq 0 \text{ ganz}) \tag{77}$$

annehmen.

Es sei eine natürliche Zahl M gegeben. Ich betrachte die Menge aller ϑ mit $N_\vartheta \leqq M$. Ist $M > 1$, so seien $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_l$ die verschiedenen Primidealteiler von $M!$. Dann geht nach der Definition von N_ϑ kein

[16]) Thue 7.

[17]) Ist $f(\vartheta)$ eine Einheit, so werde $N_\vartheta = 1$ gesetzt. Die endlich vielen Lösungen von $f(x) = 0$ können im folgenden ausgeschlossen werden.

[18]) Der Fall $f(x) = c(ax + b)^m$ bildet in der Tat eine Ausnahme (vgl. Pólya 2

n $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_l$ verschiedenes Primideal in $f(\vartheta)$ auf; es gilt also, da wegen
7) $\vartheta | f(\vartheta)$,

$$(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{a_l}\ ^{19}),$$

$a_1, \ldots a_l$ ganze rationale Zahlen $\geqq 0$ sind.

Es sei h der Grad, H die Klassenzahl von K (im weitesten Sinn). h setze

$$4h^2 = n.$$

ir $\nu = 1, \ldots l$ sei r_ν der kleinste Rest $\geqq 0$ von a_ν modulo (Hn), nn ist

$$(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{r_l} \mathfrak{a}^{Hn},$$

o $\mathfrak{a}$ ein gewisses Ideal bedeutet. $\mathfrak{a}^H$ ist ein Hauptideal (μ), also ist ich $\mathfrak{p}_1^{r_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{r_l} = (\beta)$ ein Hauptideal. Es gibt also eine Einheit ε, so daß

$$\vartheta = \varepsilon \beta \mu^n.$$

s sei $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten; dann gibt es eine Einitswurzel ϱ, eine Einheit η und r Zahlen s_ν $(\nu = 1, \ldots r)$ der Reihe bis $n-1$, so daß

$$\varepsilon = \varrho \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r} \eta^n\ ^{20}).$$

etzt man noch

$$\varrho \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r} \beta = \gamma_1, \qquad \eta \mu = \zeta_1,$$

ist

$$\vartheta = \gamma_1 \zeta_1^n;$$

nd γ_1 gehört einem endlichen Wertevorrat an; enthält nämlich K genau Einheitswurzeln, so kommen für γ_1 höchstens $A = w n^r (Hn)^l$ Werte Betracht; A hängt nur von K und M ab.

Wegen $\vartheta - \alpha | f(\vartheta)$ ergibt sich ebenso für $\vartheta - \alpha$ ein Ausdruck der orm

$$\vartheta - \alpha = \gamma_2 \zeta_2^n$$

it A Möglichkeiten für γ_2. Daher ist

78) $$\gamma_1 \zeta_1^n - \gamma_2 \zeta_2^n = \alpha.$$

ierin betrachte ich ζ_1 und ζ_2 als Unbekannte. Die Anzahl der verhiedenen Diophantischen Gleichungen (78) ist $\leqq A^2$; jede derselben hat egen $n > 4h^2 - 2h$ nach Satz 5 und Anmerkung nur endlich viele Lönngen ζ_1, ζ_2.

Es gibt also nur endlich viele ϑ mit $N_\vartheta \leqq M$.

Zusätze. 1. $f(x)$ stellt nur endlich viele Einheiten dar.

---

19) Ist ϑ eine Einheit, so steht rechts natürlich $\mathfrak{o}$.

20) Im Falle $r = 0$ treten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$, η nicht auf; es ist dann $\varepsilon = \varrho$.

2. Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_l$ gegebene Primideale und ν eine ganze Zahl aus K, deren sämtliche Primidealteiler unter diesen enthalten sind. Seien $K_1, \dots K_r$ irgendwelche algebraische Zahlkörper. Ist dann $|\nu| > M$ $= M(K_1, \dots K_r)$, so gehört keine Wurzel von $f(x) = \nu$ einem dieser Zahlkörper an.

3. Es seien $p_1, \dots p_l$ rationale Primzahlen. Thue hat bewiesen[21]), daß für jedes natürliche a nur endlich viele der Zahlen $p_1^{x_1} \dots p_l^{x_l} \pm a$ $(x_\mu = 0, 1, 2, \dots$ für $\mu = 1, \dots l)$ Primteiler haben, die sämtlich beschränkt sind. Ich werde zeigen, daß es unter diesen Zahlen auch nur endlich viele gibt, bei denen die in ungerader Potenz auftretenden Primteiler beschränkt sind.

Zum Beweise setze ich $f(x) = x^2 \mp a$; dann ist $\xi = \sqrt{\nu \pm a}$ eine Wurzel von $f(x) = \nu$. Durchläuft ν die Zahlen $p_1^{x_1} \dots p_l^{x_l}$ und bedeutet c den größten quadratfreien Faktor von $\nu \pm a$, so wächst nach Zusatz 2 die positive Zahl d mit ν über alle Grenzen, desgleichen also auch der größte Primteiler von d. Dieser tritt aber in $\nu \pm a$ in ungerader Potenz auf.

4. Für $K = \Omega$ besagt Satz 7: Zu jedem $m > 0$ gibt es ein $g = g(m)$ derart, daß für alle natürlichen $n > g$ die Zahl $N_n > m$ ist. Dieses g kann aber nicht gleichmäßig für alle Polynome $f(x)$ von einem festen Grade gewählt werden, wie das Beispiel $f_\lambda(x) = x(x + 2^\lambda)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \dots)$ lehrt; denn hier ist für $n = 2^\lambda$ $f_\lambda(n) = 2^{2\lambda+1}$, also $N_n = 2$, während n mit λ über alle Grenzen wächst.

5. Satz 7 läßt folgende Erweiterung zu:

Es sei K der Körper, welcher durch die Koeffizienten und Nullstellen von $f(x)$ erzeugt wird, und H seine Klassenzahl, h sein Grad. Es sei eine natürliche Zahl $t \geqq 4h^2 - 2h + 1$ gegeben. Dann ist nur für endlich viele ganze x des Körpers $f(x)$ von der Form σy^{tH}, wo σ und y ebenfalls ganze Zahlen des Körpers bedeuten und die Primidealteiler von y beschränkte Normen haben.

Beweis. Ist $f(x) = c \prod_{\nu=1}^{m} (x - \xi_\nu)$, worin ohne Beschränkung der Allgemeinheit c und $\xi_\nu (\nu = 1, \dots m)$ ganz sind, so können 2 verschiedene Linearfaktoren $x - \xi_\varkappa$ und $x - \xi_\lambda$ nur einen solchen gemeinsamen Idealteiler besitzen, der auch in der Diskriminante von $f(x)$ aufgeht. Kommt daher ein Primidealteiler von y^{tH} in einem $x - \xi_\nu$ zu einer Potenz vor, deren Exponent nicht durch tH teilbar ist, so ist seine Norm beschränkt. Wie beim Beweis von Satz 7 läßt sich setzen:

$$x - \xi_\varkappa = \gamma_1 \zeta_1^t, \qquad x - \xi_\lambda = \gamma_2 \zeta_2^t,$$

$$\gamma_1 \zeta_1^t - \gamma_2 \zeta_2^t = \xi_\lambda - \xi_\varkappa,$$

[21]) Thue 3.

γ_1 und γ_2 einem endlichen Wertevorrat angehören. Satz 5 zeigt dann Richtigkeit der Behauptung.

Insbesondere ist hierdurch bewiesen: Sind a, $m \geqq 2$, $n \geqq 3$ natürliche hlen, so hat die Diophantische Gleichung

$$\binom{x}{m} = a y^n$$

r endlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen x, y [22]).

6. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper des Grades $h = r_1 + 2r_2$. n seinen Konjugierten seien $K^{(1)}, \ldots K^{(r_1)}$ reell und die Paare $K^{(r_1+\nu)}$, $^{r_1+r_2+\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots r_2)$ konjugiert komplex. Jeder Zahl ϑ aus K ordne folgendermaßen eindeutig einen Punkt $(\vartheta_1, \ldots \vartheta_h)$ eines h-dimensionalen umes zu. Ich setze

$$_\lambda = \vartheta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \ldots r_1), \qquad \vartheta_{r_1+\mu} + i\vartheta_{r_1+r_2+\mu} = \vartheta^{(r_1+\mu)} \quad (\mu = 1, \ldots r_2).$$

ırchläuft nun ϑ alle Einheiten des Körpers, so haben nur endlich viele r ihnen zugeordneten Punkte beschränkten Abstand.

Beweis. Sei $M > 0$ gegeben. Gelten für zwei Einheiten ε und η s K die h simultanen Ungleichungen

$$|\varepsilon_\nu - \eta_\nu| < M \qquad (\nu = 1, \ldots h),$$

ist

$$|\varepsilon^{(\nu)} - \eta^{(\nu)}| < 2M \qquad (\nu = 1, \ldots h).$$

Die Zahlen $\varepsilon - \eta$ gehören also einem endlichen Wertevorrat an; ist $\neq 0$ eine Zahl desselben, so folgt aus $\varepsilon - \eta = \alpha$

$$\varepsilon(\varepsilon - \alpha) = \varepsilon\eta = \text{Einheit},$$

ıs nach Satz 7 nur für endlich viele ε möglich ist.

Satz 8. Es sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus einem alge- aischen Zahlkörper K. Es seien α und ξ zwei verschiedene Zahlen s K, und $f(\alpha) \neq 0$. Ich entwickle die rationale Funktion $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n}$ $(n \geqq 3)$ ch Potenzen von $x - \xi$:

9)
$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu (x-\xi)^\nu$$

d schreibe die Koeffizienten γ_ν als gekürzte Idealbrüche $\frac{\mathfrak{m}_\nu}{\mathfrak{n}_\nu}$.

Behauptung. Von den Normen der Primidealteiler von $\mathfrak{m}_\nu$ wächst e größte mit ν über alle Grenzen. Eine Ausnahme bildet nur das lynom

$$f(x) = \lambda \sum_{\varrho=0}^{n-1} \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^{n-\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu + \varrho - \varkappa)^{n-1} \right\} \left(\frac{x-\xi}{\alpha-\xi}\right)^\varrho + (x-\alpha)^n g(x),$$

[22]) Für $n = 2$ gilt dies noch nicht; z. B. hat die Gleichung $\binom{x}{2} = y^2$ unendlich le Lösungen in ganzen Zahlen.

wo λ und μ Zahlen aus K und $g(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten au K bedeuten. (Für $n = 1, 2$ gilt dies auch; es läßt sich dann jedes $f(x$ in die Form (80) setzen.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\xi = 0$ und $f(x$ vom genauen Grade $r < n$. Ich setze

$$f(x) = \beta_0 x^r + \ldots + \beta_r.$$

Dann ist nach (79)

$$(\beta_0 x^r + \ldots + \beta_r)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+n-1}{n-1} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu,$$

$$\gamma_\nu = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \sum_{i=0}^{r} \beta_{r-i} \binom{\nu+n-1-i}{n-1} \frac{1}{\alpha^{\nu-i}} \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Für alle ganzen rationalen $y \geqq 0$ ist daher

$$(81) \qquad (-1)^n \alpha^{n+y} \gamma_y = \sum_{i=0}^{r} \binom{y+n-1-i}{n-1} \beta_{r-i} \alpha^i.$$

Es gibt eine nur von α und den β abhängige Zahl $\delta \neq 0$ aus K, so da $\beta_{r-i}\alpha^i\delta$ $(i = 0, \ldots r)$ ganz ist. Dann ist

$$(82) \qquad \delta(n-1)! \sum_{i=0}^{r} \beta_{r-i} \alpha^i \binom{y+n-1-i}{n-1}$$

ein Polynom $n-1$-ten Grades in y mit ganzen Koeffizienten aus K, un zwar genau $n-1$-ten Grades, denn der Koeffizient von y^{n-1} ist

$$\delta \sum_{i=0}^{r} \beta_{r-i} \alpha^i = \delta f(\alpha) \neq 0.$$

Ist dieses Polynom keine Potenz einer linearen Funktion, so wächst na Satz 7 die Norm eines seiner Primidealteiler mit y über alle Grenze dieses Primideal geht nach (81) in $\delta(n-1)!\,\alpha^{n+y}\gamma_y$, also für hinreiche großes y im Zähler $\mathfrak{m}_y$ von (γ_y) auf.

Ist aber (82) die $n-1$-te Potenz einer linearen Funktion, so g nach (81) für zwei gewisse Zahlen λ, μ aus K

$$\gamma_y = \frac{\lambda(y+\mu)^{n-1}}{\alpha^{n+y}} \qquad (y = 0, 1, \ldots$$

also nach (79)

$$f(x) = (x-\alpha)^n \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} (\nu+\mu)^{n-1} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu$$

$$= \lambda \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^{n-\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu+\varrho-\varkappa)^{n-1}.$$

r $\varrho \geqq n$ ist aber

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^{n-\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu + \varrho - \varkappa)^{n-1}$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu + \varrho - n + \varkappa)^{n-1} = \Delta^n (\mu + \varrho - n)^{n-1} = 0;$$

o wird

$$f(x) = \lambda \sum_{\varrho=0}^{n-1} \left\{ \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} (-1)^{n-\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (\mu + \varrho - \varkappa)^{n-1} \right\} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\varrho}.$$

setzt man x durch $x - \xi$ und α durch $\alpha - \xi$ und fügt zu $f(x)$ ein liebiges durch $(x - \alpha)^n$ teilbares Polynom hinzu, so erhält man das gemeinste Polynom, das eine Ausnahme bildet, in der Form (80).

Satz 9. Es sei $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit Koeffi-enten aus einem algebraischen Zahlkörper K, deren Zähler und Nenner einander relativ prim und weder konstant noch Potenzen linearer Funk-onen sind. ξ durchlaufe die ganzen Zahlen von K. Man schreibe $f(\xi)$[23] s gekürzten Idealbruch

$$(f(\xi)) = \frac{\mathfrak{m}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi};$$

nn sind nur für endlich viele ξ die Normen der in $\mathfrak{m}_\xi$ aufgehenden imideale sämtlich beschränkt. Dasselbe gilt für $\mathfrak{n}_\xi$.

Beweis. Es genügt, $P(x)$ und $Q(x)$ als ganzzahlig anzunehmen. s gibt zwei Polynome $A(x)$ und $B(x)$ mit ganzen Koeffizienten aus K nd eine natürliche Zahl τ_{15}, so daß

3) $$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = \tau_{15}$$

. Es gibt ein Ideal $\mathfrak{k}_\xi$, so daß

$$(P(\xi)) = \mathfrak{k}_\xi \mathfrak{m}_\xi, \qquad (Q(\xi)) = \mathfrak{k}_\xi \mathfrak{n}_\xi$$

t. Aus (83) folgt dann $\mathfrak{k}_\xi | (\tau_{15})$; $\mathfrak{k}_\xi$ gehört also einem endlichen Vorrat on Idealen an. Satz 7, auf $P(x)$ und $Q(x)$ einzeln angewendet, liefert e Behauptung.

Zusätze. 1. Es seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ zwei teilerfremde ho-ogene Polynome der Grade 3 und 2 mit einfachen Linearfaktoren und tionalen Koeffizienten. Dann ist

$$P(x, y) = Q(x, y)$$

[23]) Für $f(\xi) \neq 0$.

die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt i Anfangspunkt der Koordinaten. Auf dieser Kurve liegen nach Satz nur endlich viele Punkte mit ganzen rationalen Koordinaten. Andere seits zeigt die Parameterdarstellung

$$x = \frac{Q(1,\lambda)}{P(1,\lambda)}, \qquad y = \frac{\lambda Q(1,\lambda)}{P(1,\lambda)} \qquad (y = \lambda x$$

daß die Kurve unendlich viele Punkte mit gebrochenen rationalen K ordinaten enthält. Aus Satz 9 ergibt sich nun: Durchläuft $\frac{y}{x}$ die natü lichen Zahlen, so wachsen die größten Primteiler der Zähler von x und über alle Grenzen; das gleiche gilt für die Nenner.

2. Es seien $A, B, C, \ldots$ mehrere paarweis vertauschbare Matrize n-ten Grades mit linearen Elementarteilern. Ihre Elemente seien Zahle eines algebraischen Zahlkörpers $K(\omega)$. Die Gesamtheit aller rationale Funktionen $\varphi(A, B, C, \ldots)$ mit Koeffizienten aus $K(\omega)$ bildet ein Syste von Matrizen, das ich mit $K(A, B, C, \ldots; \omega)$ bezeichne; hierbei ist vo auszusetzen, daß die im Nenner von φ stehende Matrix von der Dete minante $\neq 0$ ist. Eine Matrix nenne ich ganz, wenn ihre (charakteristi schen) Wurzeln ganz sind. Es sei $f(x)$ eine feste rationale Funktion m Koeffizienten aus $K(\omega)$, die nicht Potenz einer linearen Funktion is X sei eine ganze Matrix aus $K(A, B, C, \ldots; \omega)$, und die Determinant der Matrix des Nenners von $f(X)$ sei $\neq 0$.

Behauptung. Nur für endlich viele X ist $f(X)$ von der Form $P^p Q^q R^r \ldots$, wo $P, Q, R, \ldots$ mehrere feste paarweis vertauschbare Ma trizen mit Koeffizienten aus $K(\omega)$ von den Determinanten $\neq 0$ un $p, q, r, \ldots$ irgendwelche ganze rationale Zahlen bedeuten.

Beweis. Es seien $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von A; $\beta_1, \ldots \beta_n$ d von B, usw. Nach einem Satze von Frobenius lassen sich dann die Wurzeln einander so zuordnen, daß $\varphi(A, B, \ldots)$ die Wurzeln $\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots$ $(i = 1, \ldots n)$ besitzt. $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ genügen einer Gleichung n-ten Grade mit Koeffizienten aus $K(\omega)$; dasselbe gilt von $\beta_1, \ldots \beta_n$, usw. Die Wurzel von X, die ich φ_i $(i = 1, \ldots n)$ nenne, liegen also in einem festen Obe körper von $K(\omega)$. Aus $f(X) = P^p Q^q R^r \ldots$ folgt dann

$$f(\varphi_i) = \pi^p \varkappa^q \varrho^r \ldots,$$

wo $\pi, \varkappa, \varrho, \ldots$ gewisse Wurzeln von $P, Q, R, \ldots$ bedeuten. Ich wend Satz 9 auf den durch $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \pi, \varkappa, \ldots$ erzeugten Körper an; φ_i gehö also einem endlichen Wertevorrat an. Dies gilt für $i = 1, \ldots n$.

Hat nun X die Wurzeln φ_i, X^* die Wurzeln φ_i^*, so folgt aus de Annahme $\varphi_i = \varphi_i^*$ $(i = 1, \ldots n)$, daß die Wurzeln der Matrix $X - X^*$ sämtlich 0 sind; wegen der linearen Elementarteiler ist also $X = X^*$.

Folglich gibt es nur endlich viele Lösungen von $f(X) = P^p Q^q R^r \ldots$

Satz 10. Es sei $W(x, y)$ ein Polynom n-ten Grades mit ganzen algebraischen Koeffizienten, von dem sich kein homogener Faktor abspalten läßt. Die Koeffizienten von x^n und y^n seien hierin $\neq 0$.

Dann hat die Gleichung

(84) $$W(x, y) = 0$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen eines festen Körpers K, in welchen nur Primideale von beschränkter Norm aufgehen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Koeffizienten von $W(x, y)$ in K enthalten. Die endlich vielen Lösungen jeder der beiden Gleichungen $W(x, 0) = 0$, $W(0, y) = 0$ können beim Beweis ausgeschlossen werden.

Sei $x = \vartheta_1 \neq 0$, $y = \vartheta_2 \neq 0$ eine ganzzahlige Lösung von (84) aus K. Ist $\vartheta_1 \vartheta_2$ eine Einheit, so setze ich $N_{\vartheta_1 \vartheta_2} = 1$; sonst bedeute $N_{\vartheta_1 \vartheta_2}$ die größte unter den Normen der in $\vartheta_1 \vartheta_2$ aufgehenden Primideale.

Es sei M eine feste natürliche Zahl; dann betrachte ich die Gesamtheit aller Lösungen ϑ_1, ϑ_2 mit $N_{\vartheta_1 \vartheta_2} \leqq M$. Ist h der Grad von K, so setze ich

(85) $$n^* = 4 n^3 h^2.$$

Wie beim Beweise von Satz 7 ist

(86) $$\vartheta_1 = \gamma_1 \zeta_1^{n^*}, \qquad \vartheta_2 = \gamma_2 \zeta_2^{n^*},$$

wo γ_1 und γ_2 einem endlichen Wertevorrat angehören.

Nun sei

$$W(x, y) = W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

wo W_0 homogen vom n-ten Grade und W_1 ein Polynom höchstens $s-1$-ter Dimension ist. W_0 und W_1 sind nach Voraussetzung teilerfremd. Abgesehen von endlich vielen Ausnahmen ist also für die Lösungen von (84) $W_0(\vartheta_1, \vartheta_2) \neq 0$. Nach (86) gilt

(87) $$W_0(\gamma_1 \zeta_1^{n^*}, \gamma_2 \zeta_2^{n^*}) = -W_1(\gamma_1 \zeta_1^{n^*}, \gamma_2 \zeta_2^{n^*}).$$

Ich setze noch

$$W_0 = W_0^*(\zeta_1, \zeta_2), \qquad W_1 = W_1^*(\zeta_1, \zeta_2).$$

Ist $\vartheta_1 - \xi \vartheta_2$ ein Linearfaktor von $W_0(\vartheta_1, \vartheta_2)$, so ist $\sqrt[n^*]{\gamma_1}\,\zeta_1 - \varepsilon^\lambda \sqrt[n^*]{\gamma_2 \xi}\,\zeta_2$ für $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n^*}}$ und $\lambda = 0, \ldots n^* - 1$ ein Linearfaktor von $W_0^*(\zeta_1, \zeta_2)$. Wegen $\xi \neq 0$ sind die n^* für $\lambda = 0, \ldots n^* - 1$ entstehenden Linearfaktoren voneinander verschieden; in W_0^* sind also höchstens je n Linearfaktoren einander gleich. W_1^* hat höchstens die Dimension $(n-1)n^*$. Aus der Beweismethode von Satz 5 geht hervor, daß für

$$(88)\quad nn^* > nh\left(\frac{nn^*}{s+1}+s\right)+(n-1)n^* \qquad \left(s=\left[\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4nn^*+1}-1\right)\right]\right.$$

die Diophantische Gleichung (87) nur endlich viele Lösungen besitzt. Aus (85) folgt aber (88):

$$\begin{aligned} nn^* &= \sqrt{n^*}\sqrt{n^*}+(n-1)n^* \\ &= nh\,2\sqrt{nn^*}+(n-1)n^* > nh\left(\frac{nn^*}{s+1}+s\right)+(n-1)n^*. \end{aligned}$$

Daher hat auch (84) nur endlich viele Lösungen mit $N_{\vartheta_1\vartheta_2} \leqq M$.

Zusätze. 1. Satz 7 ist ein spezieller Fall von Satz 10. Er ergibt sich nämlich, wenn man in (76) $x-\lambda_1=u$, $x-\lambda_2=v$ setzt und Satz 10 auf $W(u,v)=u-v+(\lambda_1-\lambda_2)$ anwendet.

2. Es seien eine positive Zahl M und eine quadratfreie natürliche Zahl $D>1$ gegeben. Es sei x, y eine Lösung der Pellschen Gleichung $x^2-Dy^2=4$. Dann gibt es eine positive Zahl $N=N(M,D)$ derart, daß für $xy>N$ ein Primteiler von xy größer als M ist.

Literaturverzeichnis.

Bachmann, P., Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig (Teubner); 1892.

Borel, É., Leçons sur la théorie de la croissance. Paris (Gauthier-Villars); 1910.

Cahen, E., Éléments de la théorie des nombres. Paris (Gauthier-Villars); 1900.

Delaunay, B., La solution générale de l'équation $X^3\varrho+Y^3=1$. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **162** (1916), S. 150/151.

Hayashi, T., Le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est pas le carré d'un nombre entier. Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 4, **18** (1918).

Hill, G. W., Solution of a Problem in the Theory of Numbers. a) The Analyst, **1** (1874), S. 27/28. b) The collected Mathematical Works, **1**, Washington; 1905.

Liouville, J., Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 1, **16** (1851), S. 133–142.

Maillet, E., Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Paris (Gauthier-Villars); 1906.

— Sur un théorème de M. Axel Thue. Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 4, **16** (1916), S. 338–345.

— Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **168** (1919), S. 217–220.

Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin (Teubner); 1913.

Pólya, G., Sur les propriétés arithmétiques des séries entières, qui représentent des fonctions rationnelles. L'enseignement mathématique, **19** (1917), S. 323.

— Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome. Mathematische Zeitschrift, **1** (1918), S. 143–148.

ɜrmer, C., Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1897.
Sur une équation indéterminée. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **127** (1898), S. 752–754.
ue, A., Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzel der ganzen Funktion dritten Grades $x^3 - ax - b$. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
Om en generel i store hele tal uløsbar ligning. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1908.
Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **135** (1909), S. 284–305.
Eine Lösung der Gleichung $\varrho P(x) - Q(x) = (x - \varrho)^n R(x)$ in ganzen Funktionen P, Q und R für jede beliebige ganze Zahl n, wenn ϱ eine Wurzel einer beliebigen ganzen Funktion bedeutet. Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania; 1909.
Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **138** (1910), S. 96–108.
Über einige in ganzen Zahlen x und y unmögliche Gleichungen $F(x, y) = 0$. Skrifter udgit av Videnskabsselskapet i Kristiania; 1911.
Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von der Form $ax^r - by^r = f$. Skrifter udgit av Videnskabsselskapet i Kristiania; 1918.

(Eingegangen am 10. Juni 1920.)

Über Körper konstanten Durchmessers.

Von

K. Reidemeister in Hamburg.

Das euklidische dreidimensionale beschränkte und abgeschlossene G
biet $\mathfrak{K}$ mit der Oberfläche $\mathfrak{R}$ heißt ein Körper von konstantem Durc
messer d, wenn zu jedem Punkt P aus $\mathfrak{R}$ mindestens ein zweiter Punk
P_m in $\mathfrak{K}$ existiert derart, daß stets die Entfernung

$$PP' \leqq PP_m = d$$

ist, wenn P' ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{K}$ ist. Es soll der Satz bewiese
werden: *Jeder Körper von konstantem Durchmesser d ist ein Körp
konstanter Breite $b = d$* [1]).

Wir bemerken, daß $\mathfrak{K}$ jedenfalls ein konvexer Körper ist; denn dur
jeden Randpunkt P des Gebietes geht mindestens eine Stützebene hi
durch. Schlage ich nämlich um P die Kugel mit dem Radius d, so lie
sicher kein Punkt von $\mathfrak{K}$ außerhalb, mindestens ein Punkt P_m aber a
derselben. Die Tangentialebene durch P_m an diese Kugel, die auf d
Geraden PP_m senkrecht steht, ist also eine Stützebene an $\mathfrak{K}$. Dur
Wiederholung derselben Konstruktion für P_m folgt, daß auch die durch
gehende, auf PP_m senkrecht stehende Ebene eine Stützebene und die Brei
von $\mathfrak{K}$ in Richtung PP_m gleich d ist.

Unter Bezugnahme auf Minkowskis Abhandlung „Zur Theorie d
konvexen Körper" (§§ 13—15) können wir also sagen, daß ein Punkt a
$\mathfrak{R}$ entweder ein Flächenpunkt, ein Kantenpunkt oder ein Eckpunkt i
d. h., daß der dem Punkte zugeordnete Projektionsraum der Halbraum, e
Keil oder ein konvexer Kegel ist. Insbesondere folgt aus der eben au
geführten Konstruktion, daß die einem Eckpunkte P_e entsprechenden P
innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes der Kugel mit dem Radi
d um P_e liegen müssen, das von den Normalen derjenigen Stützeben
durch P_e auf dieser Kugel ausgeschnitten wird, die mindestens eine Gera
mit dem Projektionsraume von P_e gemeinsam haben. Dieses Gebiet zie

---

[1]) Ein Körper heißt von konstanter Breite b, wenn parallele Stützebenen
Entfernung b besitzen.

h für einen Kantenpunkt P_k auf einen Hauptkreisabschnitt, für einen ächenpunkt P_f auf einen einzigen Punkt P_{fm} zusammen. $\mathfrak{K}$ hat also Richtung der Normalen aller Stützebenen, welche einen Flächenpunkt t $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben, die Breite d.

Um dasselbe auch für die übrigen Richtungen zu erweisen, zeigen wir nächst, daß $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper im engeren Sinne ist, d. h. keine radenstücke in seiner Begrenzung erhält. Sei nämlich g ein solches radenstück aus $\mathfrak{K}$, so gäbe es eine Stützebene an $\mathfrak{K}$, welche g enthielte. nun P ein innerer Punkt von g, so kann P nur ein Flächenpunkt er ein Kantenpunkt sein, mithin stehen alle Geraden PP_m auf g senkht, und wenn P' ein von P verschiedener Punkt von g ist, so wäre $P_m > PP_m = d$. Also gibt es kein solches Geradenstück.

Sei jetzt $\mathfrak{G}$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt o und der Oberfläche $\mathfrak{E}$. dem Punkte P von $\mathfrak{K}$ ordnen wir alle die Punkte p von $\mathfrak{E}$ zu, für die Richtung $\overline{op}$ parallel und gleichen Sinnes mit den nach dem ßeren von $\mathfrak{K}$ weisenden Normalen der Stützebenen durch P ist. Jedem entspricht ein und nur ein P; denn sonst enthielte $\mathfrak{K}$ ein Geradenstück, gegen nicht jedem P nur ein p; vielmehr entspricht jedem P_e ein konxes Flächenstück (die Randpunkte des sog. Normalensektors $N(P)$, soit sie zu $\mathfrak{E}$ gehören), jedem P_k ein Hauptkreisbogenstück und jedem allein nur ein einziger p_f.

Diese Zuordnung hat gewisse Stetigkeitseigenschaften. Ist $p_1, p_2, \ldots,$, ... eine Folge von Punkten in $\mathfrak{E}$, welche gegen p konvergiert, und $, P_2, \ldots, P_n \ldots, P$ die bzw. in $\mathfrak{K}$ entsprechenden Punkte, so konvergiert ch die Folge $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ gegen P. Denn angenommen, dies re nicht der Fall, so könnte ich aus $P_1, P_2, \ldots$ eine solche Teilfolge $_1, P_{n_2}, \ldots$ auswählen, für die die Entfernung $P_{n_i}P > a$ bliebe, wo a e endliche Strecke bedeutet. Schlage ich also um P die Kugel mit dem dius a, so müßte die Folge mindestens einen Häufungspunkt P_0 außerb dieser Kugel besitzen, und da $p_{n_1}, p_{n_2} \ldots$ gegen p konvergiert, so nnte die Strecke PP_0 nur Randpunkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, entgegen der tsache, daß $\mathfrak{K}$ konvex im engeren Sinne ist.

Ist andererseits $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ eine Folge von Punkten in $\mathfrak{K}$, die gen P konvergiert, und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \ldots, \mathfrak{q}_n, \ldots, \mathfrak{q}$ die bzw. in $\mathfrak{E}$ entsprechenden biete, so hat jede Folge von Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ nur Häufungsnkte p aus $\mathfrak{q}$, wenn p_n in $\mathfrak{q}_n$ enthalten ist. Sonst könnten wir nämn aus $P_1, P_2 \ldots$ eine solche Teilfolge $P_{n_1}, P_{n_2} \ldots$ auswählen, deren Stützenen sich gegen eine durch P gehende Ebene, welche innere Punkte von enthält, häufen, was ersichtlich unmöglich ist.

Mithin entspricht jedem Gebiete in $\mathfrak{K}$ ein solches in $\mathfrak{E}$, und jedem biete in $\mathfrak{E}$ eine Punktmenge in $\mathfrak{K}$, die sich aus isolierten Punkten,

Kurvenzügen und Gebieten zusammensetzt. Ist insbesondere $\mathfrak{A}$ ein Gebiet in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}$ das entsprechende in $\mathfrak{E}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ das aus $\mathfrak{a}$ durch Spiegelung am Mittelpunkte o von $\mathfrak{G}$ hervorgehende Gebiet und $\overline{\mathfrak{A}}$ die $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{R}$ entsprechende Punktmenge, so sind alle P_m zu einem beliebigen Punkte P aus $\mathfrak{A}$ in $\overline{\mathfrak{A}}$ und umgekehrt alle $\overline{P}_m$ zu einem $\overline{P}$, der innerer Punkt von $\overline{\mathfrak{A}}$, in $\mathfrak{A}$ enthalten.

Schließlich sei noch bemerkt, daß wenn p Häufungspunkt einer Folge von Punkten $p_1, p_2, \ldots$ ist und die Breite von $\mathfrak{R}$ in den Richtungen $op_1, op_2, \ldots$ gleich d ist, die Breite von $\mathfrak{R}$ auch in Richtung op gleich d ist. Ist nämlich (1) eine Richtung, in der die Breite von $\mathfrak{R}$ gleich d ist, und sind P, P_m die zugehörigen Stützpunkte ($PP_m = d$), so müssen die Stützebenen, deren Normalenrichtung (2) mit (1) einen Winkel α bildet, mindestens die Strecke PP_m enthalten; es muß also $d \geqq b_2 \geqq d \cdot \cos\alpha$ sein, wenn b_2 die Breite von $\mathfrak{R}$ in Richtung (2) bedeutet, woraus für $\lim \alpha = 0$ $\lim b_2 = d$ folgt.

Nunmehr ist der ausstehende Teil des Beweises leicht zu erbringen. Ein Punkt p von $\mathfrak{E}$ gehöre zu der Menge $\mathfrak{a}$, wenn sich eine solche Umgebung von p angeben läßt, die kein p_f (d. h. einen Punkt, dem ein Flächenpunkt von $\mathfrak{R}$ entspricht) enthält. Andernfalls gehöre p zu der zu komplementären Menge $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{a}$ ist ein (offenes) Gebiet. Die Randpunkte von $\mathfrak{a}$, deren Menge $\mathfrak{r}$ heißen möge, sind Bildpunkte von solchen Stützebenen, die durch Kanten- oder Eckpunkte gehen und in deren Normalenrichtungen die Breite von $\mathfrak{R}$ gleich d ist. Die $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$ entsprechende Menge heiße $\mathfrak{A}$.

Ferner enthalte die Punktmenge $\mathfrak{M}$ alle die und nur die Punkte $P_{\mathfrak{M}}$, für welche es ein P in $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $PP_{\mathfrak{M}} = d$ und die Richtung $PP_{\mathfrak{M}}$ einem Radius op parallel läuft, wo p aus $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{r}$ ist. Diese Menge ist ein zweidimensionales abgeschlossenes Gebiet, das mindestens alle diejenigen $P_{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{R}$, für die die Richtung $PP_{\mathfrak{M}}$ einem in $\mathfrak{r}$ enthaltenen Punkte entspricht — das mit anderen Worten die Menge $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ seiner Randpunkte mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam hat. Mithin wird durch $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ ein von $\mathfrak{M}$ überspanntes Gebiet $\overline{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{R}$ umgrenzt, das sicher innere Punkte enthält und das dem zu $\mathfrak{a}$ spiegelbildlichem Gebiete $\bar{\mathfrak{a}}$ in $\mathfrak{E}$ entspricht. $\overline{\mathfrak{A}}$ ist aber mit $\mathfrak{A}$ identisch. Denn angenommen, es gäbe einen inneren Punkt $\overline{P}$ aus $\overline{\mathfrak{A}}$, welcher nicht in $\mathfrak{M}$ läge, so müßte es einen Punkt $\overline{P}_m$ in $\mathfrak{A}$ geben, für den $\overline{P}\overline{P}_m = d$ und die Richtung von $\overline{P}\overline{P}_m$ einem Punkte aus $\bar{\mathfrak{a}}$ (oder dem spiegelbildlichen aus $\mathfrak{a}$) zugeordnet wäre, also müßte $\overline{P}$ entgegen der Annahme zu $\mathfrak{M}$ gehören.

Folglich ist die Breite b von $\mathfrak{R}$ auch in allen Richtungen, welche Punkten von $\mathfrak{a}$ entsprechen, gleich d.

Hamburg, Math. Seminar.

(Eingegangen am 6. Juli 1920.)

Klassifikation der Raumkorrelationen.

Von

Karl Kommerell in Stuttgart.

In meiner Arbeit über nichtaffine Raumkollineationen (Jahresber. der utsch. Math. Ver. **29** (1920), S. 1—27, eine zweite über die affinen llineationen wird demnächst ebendort erscheinen) habe ich eine Einteilung Kollineationen des dreidimensionalen Raums nach neuen Gesichtspunkten geben. In dieser Arbeit soll eine Klassifikation der Raumkorrelationen ge- ben werden, derart, daß aus den Koeffizienten der Gleichung (1), welche die rrelation festlegt, die Art der Abbildung vollständig übersehen werden nn. Dieses Problem ist, abgesehen von Ansätzen, die sich bei Magnus[1]) den, bisher noch nicht bearbeitet worden. Es wird sich zeigen, daß es ne Verallgemeinerung des Klassifikationsproblems für Flächen zweiter dnung ist. Für jeden der abgebildeten Räume wird man zu einem Haupt- hsenproblem geführt: diese beiden verschmelzen in ein einziges, wenn die linearform (1), welche die Abbildung definiert, symmetrisch ist; das Klassi- ationsproblem bezieht sich dann auf diejenige Fläche zweiter Ordnung, lche die durch die symmetrische Bilinearform (1) definierte Polarver- ndtschaft vermittelt. Wegen der Ergebnisse dieser Arbeit im einzelnen rweisen wir auf den folgenden Text. Die Untersuchung selbst soll so führt werden, daß eine Übertragung auf mehrdimensionale Räume leicht öglich ist.

Durch die bilineare Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i x'_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

die x_i, x'_k sich auf zwei kartesische Rechtssysteme beziehen mögen, rd der Raum R auf den Raum R' relativ bezogen; dabei setzen wir

[1]) L. J. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. om. des Raumes, 1837, S. 120—149; den von Magnus betrachteten Spezialfall be- ndelt Th. Reye, Journ. f. Math. **79** (1875), S. 166—171, synthetisch.

voraus, daß im allgemeinen $a_{ik} \neq a_{ki}$ und daß die Determinante

$$A = |a_{ik}| \neq 0 \tag{2}$$

sei, d. h. wir beschränken uns auf nichtsinguläre Korrelationen. Wir führen nun in jedem der Räume durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_i &= l_i x_1 + m_i x_2 + n_i x_3 + X_{i0} x_4, & X_i' &= l_i' x_1' + m_i' x_2' + n_i' x_3' + X_{i0}' x_4' \\ X_4 &= x_4, & X_4' &= x_4' \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

je ein neues Koordinatensystem ein und bestimmen die zur Verfügung stehenden Konstanten so, daß die in den X_i, X_k' geschriebene bilineare Gleichung (1) möglichst einfach sind. Dabei sollen die l_i, m_i, n_i und ebenso die l_i', m_i', n_i' die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution der Determinante $+1$ sein. Wie im Falle der Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung, so ist auch hier zu unterscheiden, ob A_{44}, d. h. die Unterdeterminante von a_{44} in A, von Null verschieden oder gleich Null ist. Im ersten Falle läßt sich zeigen, daß die Bilinearform $\Sigma a_{ik} x_i x_k'$ durch (3) in die *kanonische Form*

$$i_1 X_1 X_1' + i_2 X_2 X_2' + i_3 X_3 X_3' + i_4 X_4 X_4' \tag{4}$$

übergeführt werden kann, im zweiten Falle in die *kanonische Form*

$$i_1 X_1 X_1' + i_2 X_2 X_2' + i_3 X_4 X_3' + i_4 X_3 X_4'. \tag{5}$$

Darnach zerfallen die Korrelationen in zwei Klassen, die wir als *zentrale* ($A_{44} \neq 0$) und *parabolische* ($A_{44} = 0$) unterscheiden. Wir behandeln zuerst

I. Die zentralen Korrelationen ($A_{44} \neq 0$).

Setzt man aus (3) die Werte der X_i, X_k' in (4) ein und vergleicht die Koeffizienten der entstehenden Bilinearform mit den Koeffizienten der Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k'$, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= i_1 l_1 l_1' + i_2 l_2 l_2' + i_3 l_3 l_3', & a_{21} &= i_1 l_1 m_1' + i_2 l_2 m_2' + i_3 l_3 m_3', \\ a_{12} &= i_1 m_1 l_1' + i_2 m_2 l_2' + i_3 m_3 l_3', & a_{22} &= i_1 m_1 m_1' + i_2 m_2 m_2' + i_3 m_3 m_3', \\ a_{13} &= i_1 n_1 l_1' + i_2 n_2 l_2' + i_3 n_3 l_3'; & a_{23} &= i_1 n_1 m_1' + i_2 n_2 m_2' + i_3 n_3 m_3' \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= i_1 l_1 n_1' + i_2 l_2 n_2' + i_3 l_3 n_3', \\ a_{32} &= i_1 m_1 n_1' + i_2 m_2 n_2' + i_3 m_3 n_3', \\ a_{33} &= i_1 n_1 n_1' + i_2 n_2 n_2' + i_3 n_3 n_3'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{14} &= i_1 l_1' X_{10} + i_2 l_2' X_{20} + i_3 l_3' X_{30}, & a_{41} &= i_1 l_1 X_{10}' + i_2 l_2 X_{20}' + i_3 l_3 X_{30}', \\ a_{24} &= i_1 m_1' X_{10} + i_2 m_2' X_{20} + i_3 m_3' X_{30}, & a_{42} &= i_1 m_1 X_{10}' + i_2 m_2 X_{20}' + i_3 m_3 X_{30}', \\ a_{34} &= i_1 n_1' X_{10} + i_2 n_2' X_{20} + i_3 n_3' X_{30}; & a_{43} &= i_1 n_1 X_{10}' + i_2 n_2 X_{20}' + i_3 n_3 X_{30}' \end{aligned} \tag{7}$$

$$a_{44} = i_1 X_{10} X_{10}' + i_2 X_{20} X_{20}' + i_3 X_{30} X_{30}' + i_4.$$

s sind für die 28 unbekannten Größen 16 Gleichungen; dabei bestehen r noch je 6 Gleichungen für die l_i, m_i, n_i bzw. l_i', m_i', n_i', da diese Koeffizienten orthogonaler Substitutionen sind. Die Anzahl der Gleichungen ist also gerade ausreichend. Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} b_{ik} &= b_{ki} = a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k}, \\ b'_{ik} &= b'_{ki} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{k3}. \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

den Gleichungen (6) erhält man dann

$$\begin{aligned} b_{11} &= i_1^2 l_1^2 + i_2^2 l_2^2 + i_3^2 l_3^2, & b_{21} &= i_1^2 m_1 l_1 + i_2^2 m_2 l_2 + i_3^2 m_3 l_3, \\ b_{12} &= i_1^2 l_1 m_1 + i_2^2 l_2 m_2 + i_3^2 l_3 m_3, & b_{22} &= i_1^2 m_1^2 + i_2^2 m_2^2 + i_3^2 m_3^2, \\ b_{13} &= i_1^2 l_1 n_1 + i_2^2 l_2 n_2 + i_3^2 l_3 n_3, & b_{23} &= i_1^2 m_1 n_1 + i_2^2 m_2 n_2 + i_3^2 m_3 n_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{31} &= i_1^2 n_1 l_1 + i_2^2 n_2 l_2 + i_3^2 n_3 l_3, \\ b_{32} &= i_1^2 n_1 m_1 + i_2^2 n_2 m_2 + i_3^2 n_3 m_3, \\ b_{33} &= i_1^2 n_1^2 + i_2^2 n_2^2 + i_3^2 n_3^2. \end{aligned}$$

nso erhält man ein entsprechendes System in den gestrichenen Größen l_k', m_k', n_k'. Jede der drei Spalten in (9) multipliziert man der Reihe h mit l_k, m_k, n_k und addiere jedesmal. Es folgt so

$$\begin{aligned} (b_{11} - i_k^2)\, l_k + b_{12} m_k + b_{13} n_k &= 0, \\ b_{21} l_k + (b_{22} - i_k^2)\, m_k + b_{23} n_k &= 0, \\ b_{31} l_k + b_{32} m_k + (b_{33} - i_k^2)\, n_k &= 0. \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

aus ergibt sich, daß i_1^2, i_2^2, i_3^2 die Wurzeln der *Hauptachsengleichung* ^{2} sind

$$\begin{vmatrix} b_{11} - i^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - i^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - i^2 \end{vmatrix} = 0,$$

man i nicht mit der imaginären Einheit verwechseln wird; diese chung besitzt drei *reelle, positive* [2]) Wurzeln. Da die Determinante $= A_{44}^2 \neq 0$ ist, so sind die Wurzeln i_1^2, i_2^2, i_3^2 alle von Null verschieden. Aus (10) erhält man für $k = 1, 2, 3$ die Verhältnisse der Richtungsnus l_k, m_k, n_k, von denen man genau wie beim Transformationsproblem Flächen zweiter Ordnung zeigt, daß $l_\varkappa l_\mu + m_\varkappa m_\mu + n_\varkappa n_\mu = 0$ ist. hat jetzt die Richtungskosinus so zu bestimmen, daß ihre Determante den Wert $+1$ erhält. Ersetzt man in (10) und (11) die b_{ik}, l_k, n_k durch die gestrichenen Werte, so erhält man auch für R' eine *uptachsengleichung*; diese besitzt dieselben Wurzeln wie (11), da $= |b'_{ik}| = A_{44}^2$ ist. Ist in (1) $a_{ik} = a_{ki}$, so ist auch $b_{ik} = b'_{ik}$; das

[2]) Das Letztere folgt aus dem Satz von Descartes.

System l_k, m_k, n_k ist dasselbe wie das System l'_k, m'_k, n'_k; sie definiere die Richtungskosinus der Hauptachsen der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, welche die Ordnungsfläche des durch (1) definierten Polarsystems ist; dabei ist vorausgesetzt, daß die Koordinatensysteme in beiden Räumen zusammenfallen. Die Gleichung (11) kann dann in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}-i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}+i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+i \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Aus alldem geht hervor, daß das hier behandelte Problem eine Verallgemeinerung des Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung ist.

Da durch (11) nur die Quadrate der Größen i_1^2, i_2^2, i_3^2 bestimmt sind, so ist noch anzugeben, mit welchen Vorzeichen i_1, i_2, i_3 zu versehen sind. Zu diesem Zweck leite man aus (6) das Gleichungssystem

$$(12) \qquad \begin{aligned} i_k l'_k &= a_{11} l_k + a_{12} m_k + a_{13} n_k, \quad i_k m'_k = a_{21} l_k + a_{22} m_k + a_{23} n_k, \\ i_k n'_k &= a_{31} l_k + a_{32} m_k + a_{33} n_k \qquad (k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ab. Aus diesen Gleichungen erhält man i_1, i_2, i_3 mit ganz bestimmten Vorzeichen, nachdem die l_k, l'_k bestimmt sind. Zur Berechnung von i_1, i_2, i_3, l_k, l'_k usw. wurden bisher stets Gleichungen benützt, die aus (6) abgeleitet wurden. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die nach den angegebenen Vorschriften berechneten Größen auch wirklich das System (6) befriedigen. Dreht man bei den Richtungskosinus $l_\varkappa$, $m_\varkappa$, $n_\varkappa$, l_μ, m_μ, n das Vorzeichen um, so ändern $i_\varkappa$ und i_μ das Vorzeichen. Dies hängt damit zusammen, daß in der bilinearen Gleichung

$$(13) \qquad i_1 X_1 X'_1 + i_2 X_2 X'_2 + i_3 X_3 X'_3 + i_4 X_4 X'_4 = 0,$$

durch welche die Korrelation in bezug auf die neuen Koordinatensysteme bestimmt ist, die positiven Richtungen von zwei Koordinatenachsen des einen Raums mit ihren negativen vertauscht werden können, wenn gleichzeitig das Vorzeichen von zwei der Größen i_k passend geändert wird. Umgekehrt ist es auch gestattet, das Vorzeichen von zwei der Größen i gleichzeitig zu ändern, da dies einer Umklappung um eine Koordinatenachse um den Winkel π gleichkommt.

Nachdem so die Richtungen der neuen Koordinatenachsen in beiden Räumen bestimmt sind, handelt es sich noch um die *Bestimmung des neuen Ursprungs* für jeden der beiden Räume. Aus den Gleichungen (7) erhält man die Größen X_{k0} und X'_{k0}. Nach (3) bedeuten z. B. X_{k0} die (nichthomogenen) Koordinaten des alten Ursprungs im Raume R in bezug auf das neue System. Nennt man x_{k0} die nichthomogenen Koordinaten

neuen Ursprungs in bezug auf das alte System, so hat man nach (3) Beziehungen

$$-x_{10} = l_1 X_{10} + l_2 X_{20} + l_3 X_{30}, \quad -x_{20} = m_1 X_{10} + m_2 X_{20} + m_3 X_{30}$$
$$-x_{30} = n_1 X_{10} + n_2 X_{20} + n_3 X_{30}.$$

ltipliziert man jede der Gleichungen (12) mit X_{k0} und summiert man $k = 1$ bis $k = 3$, so erhält man mit Rücksicht auf die letzten Glei-ngen und (7)

$$_1 x_{10} + a_{12} x_{20} + a_{13} x_{30} + a_{14} = 0, \quad a_{21} x_{10} + a_{22} x_{20} + a_{23} x_{30} + a_{24} = 0,$$
$$a_{31} x_{10} + a_{32} x_{20} + a_{33} x_{30} + a_{34} = 0$$

hieraus

$$x_{10} : x_{20} : x_{30} : 1 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44},$$
$$x'_{10} : x'_{20} : x'_{30} : 1 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44},$$

die x'_{k0} entsprechende Bedeutung für den Raum R' haben und ent-echend gewonnen werden. Dabei bedeutet A_{ik} die Unterdeterminante a_{ik} in A.

Aus der Gleichung

$$i_1 i_2 i_3 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 \\ i_3 l_3 & i_3 m_3 & i_3 n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 \end{vmatrix}$$

ält man durch Multiplikation nach Spalten und Beachtung von (7)

$$i_1 i_2 i_3 = \mathrm{A}_{44},$$

ebenso aus

$$i_1 i_2 i_3 i_4 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 & i_1 X_{10} \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 & i_2 X_{20} \\ i_3 l_3 & i_3 m_3 & i_3 n_3 & i_3 X_{30} \\ 0 & 0 & 0 & i_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 & X'_{10} \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 & X'_{20} \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 & X'_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

äß den Gl. (6) und (7)

$$i_1 i_2 i_3 i_4 = A,$$

$$i_4 = \frac{A}{A_{11}}.$$

nit sind alle Konstanten der Transformation bestimmt.

Orientiert man nun die beiden Räume so gegeneinander, daß die en Koordinatenachsen zusammenfallen, so lehrt die bilineare Beziehung , daß die beiden Räume sich in *polarreziproker* Lage in Beziehung auf Fläche zweiter Ordnung

$$i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + i_3 X_3^2 + i_4 X_4^2 = 0$$

befinden. *Zwei durch zentrale Korrelation aufeinander bezogene Räume lassen sich also stets in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß sie ein Polarsystem bilden und zwar auf vier Arten*[3]), letzteres, weil un jede der Koordinatenachsen um den Winkel π umgeklappt werden kann Aus (15) und (16) kann geschlossen werden, daß für $A > 0$ die Ordnungsfläche (18) des Polarsystems ein einmantliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid, für $A < 0$ ein zweimanteliges Hyperboloid oder ein reelles Ellipsoid ist. Danach zerfallen entsprechend dem Vorzeichen von A d zentralen Korrelationen *in zwei Unterklassen.*

In jedem der Räume existiert nach den obigen Ausführungen ei ganz bestimmtes Koordinatensystem, auf das bezogen die bilineare Glei chung die kanonische Form (13) annimmt. Die Ebenen dieses System nennen wir die *Hauptebenen* und den Ursprung den *Mittelpunkt* des en sprechenden Raumes. Die Gl. (14) geben die Mittelpunktskoordinate Zwei Ebenen im Raume R, die symmetrisch zu einer Hauptebene liege entsprechen in R' zwei Punkte, die symmetrisch zu einer Hauptebene von R' liegen. Die Größen i_k nennen wir die *Invarianten der Korrelation.* Verschiebt man nämlich jeden der Räume beliebig gegen d Koordinatensysteme, auf die sich (1) bezieht, und führt dann die Reduktion aus, so müssen sich natürlich für $i_1 : i_2 : i_3 : i_4$ bei passender Wahl d positiven Richtungen der Hauptachsen dieselben Werte ergeben wie vorhe Diese Invarianz kann auch analytisch bestätigt werden.

Es kann vorkommen, daß die Hauptachsengleichung (11) eine *Doppelwurzel* besitzt: die Bedingung dafür, daß eine solche auftreten kann, i nach dem bekannten Satze von Weierstraß die, daß die Determinan der linken Seite von (11) den Rang 1 annimmt. Wie im Falle der Fläche zweiter Ordnung so zeigt man auch hier, daß immer noch orthogonale Substitutionen (3) bestehen, welche die Bilinearform (1) in die kanonisch (4) überführen. Die Ordnungsfläche (18) ist dann eine Rotationsfläche Die Korrelation ist *rotatorisch.*

Sind endlich alle drei Wurzeln in (11) einander gleich, was dann ein tritt, wenn $b_{11} = b_{22} = b_{33}$, $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ ist, so werden die Hauptebenen gänzlich unbestimmt und die Korrelation kann durch eine reelle oder imaginäre Kugel erzeugt werden. Die Elemente in A_{44} sind dann bis auf einen Faktor die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution.

II. Die parabolischen Korrelationen ($A_{44} = 0$).

Wie die Paraboloide durch $A_{44} = 0$ definiert sind, so sind die parabolischen Korrelationen durch $A_{44} = 0$ charakterisiert. In A_{44} dürfen aber nicht alle Minoren zweiten Grades verschwinden, da sonst $A = 0$ wäre

[3]) Vgl. L. J. Magnus und Th. Reye a. a. O.

man erkennt, wenn A nach den Elementen der letzten Zeile und Spalte
vickelt wird. *Wir setzen also voraus, daß A_{44} den Rang 2 habe.*
1 zeigen wir, daß die Bilinearform $\Sigma a_{ik} x_i x_k'$ vermöge der Gleichungen
in *die kanonische Form* (5) transformiert werden kann. Dies voraus-
tzt, existieren in diesem Falle in jedem Raume nur *zwei Hauptebenen*,
che sich in der einen *Hauptachse* schneiden. Für den Raum R sind
Hauptebenen die Ebenen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$; in der Tat entsprechen
äß der bilinearen Gleichung

$$i_1 X_1 X_1' + i_2 X_2 X_2' + i_3 X_4 X_3' + i_4 X_3 X_4' = 0$$

i Punkten in R, die symmetrisch zur Ebene $X_1 = 0$ liegen, in R zwei
Ebene $X_1' = 0$ symmetrisch liegende Ebenen. Die beiden anderen
en Koordinatenachsen mögen in jedem der beiden Räume als *Neben-
sen* bezeichnet werden. *Mittelpunkte* existieren nicht. Die Größen
i_2 sollen die *Hauptinvarianten*, i_3, i_4 die *Nebeninvarianten* heißen.
Trägt man wie im Falle I die Werte der X_i, X_i' aus (3) in (5)
und vergleicht die Koeffizienten der entstehenden Bilinearform mit den
ffizienten der Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k'$, so erhält man das System von Glei-
ngen

$$\begin{aligned}
a_{11} &= i_1 l_1 l_1' + i_2 l_2 l_2', & a_{21} &= i_1 l_1 m_1' + i_2 l_2 m_2', & a_{31} &= i_1 l_1 n_1' + i_2 l_2 n_2',\\
a_{12} &= i_1 m_1 l_1' + i_2 m_2 l_2', & a_{22} &= i_1 m_1 m_1' + i_2 m_2 m_2', & a_{32} &= i_1 m_1 n_1' + i_2 m_2 n_2',\\
a_{13} &= i_1 n_1 l_1' + i_2 n_2 l_2', & a_{23} &= i_1 n_1 m_1' + i_2 n_2 m_2', & a_{33} &= i_1 n_1 n_1' + i_2 n_2 n_2',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= i_1 l_1' X_{10} + i_2 l_2' X_{20} + i_3 l_3', & a_{41} &= i_1 l_1 X_{10}' + i_2 l_2 X_{20}' + i_4 l_3,\\
a_{24} &= i_1 m_1' X_{10} + i_2 m_2' X_{20} + i_3 m_3', & a_{42} &= i_1 m_1 X_{10}' + i_2 m_2 X_{20}' + i_4 m_3,\\
a_{34} &= i_1 n_1' X_{10} + i_2 n_2' X_{20} + i_3 n_3', & a_{43} &= i_1 n_1 X_{10}' + i_2 n_2 X_{20}' + i_4 n_3;
\end{aligned}$$

$$a_{44} = i_1 X_{10} X_{10}' + i_2 X_{20} X_{20}' + i_3 X_{30}' + i_4 X_{30}.$$

Die drei ersten Gleichungen in (20) sind linear in $i_1 l_1'$, $i_2 l_2'$, die mitt-
n in $i_1 m_1'$, $i_2 m_2'$ und die letzten in $i_1 n_1'$, $i_2 n_2'$; sollen diese verträglich
, so müssen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & l_1 & l_2 \\ a_{12} & m_1 & m_2 \\ a_{13} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & l_1 & l_2 \\ a_{22} & m_1 & m_2 \\ a_{23} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & l_1 & l_2 \\ a_{32} & m_1 & m_2 \\ a_{33} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Die Minoren der Elemente der ersten Spalten sind aber l_3, m_3, n_3
die vorhergehenden Gleichungen lauten also

$$a_{k1} l_3 + a_{k2} m_3 + a_{k3} n_3 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Da A_{44} den Rang 2 hat, so bestimmen sich aus (23) die *Richtungs-
nus l_3, m_3, n_3 der Hauptachse in R.* Ersetzt man a_{ki} durch a_{ik} und

l_3, m_3, n_3 durch l_3', m_3', n_3', so erhält man aus (23) die Gleichunge
welche die *Richtungskosinus der Hauptachse in* R' bestimmen. Nu
bilde man wie in I gemäß (8) und (20) die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&b_{11} = i_1^2 l_1^2 + i_2^2 l_2^2, && b_{21} = i_1^2 m_1 l_1 + i_2^2 m_2 l_2, && b_{31} = i_1^2 n_1 l_1 + i_1^2 n_2 \\
(24)\quad &b_{12} = i_1^2 l_1 m_1 + i_2^2 l_2 m_2, && b_{22} = i_1^2 m_1^2 + i_2^2 m_2^2, && b_{32} = i_1^2 n_1 m_1 + i_2^2 n \\
&b_{13} = i_1^2 l_1 n_1 + i_2^2 l_2 n_2; && b_{23} = i_1^2 m_1 n_1 + i_2^2 m_2 n_2; && b_{33} = i_1^2 n_1^2 + i_2^2 n_2^2;
\end{aligned}
$$

sowie die entsprechenden Gleichungen in $b_{ik}', l_i', m_i', n_i'$. Wie in I,
leitet man aus (24) ab

$$
\begin{aligned}
&(b_{11} - i_k^2) l_k + b_{12} m_k + b_{13} n_k = 0, \\
(25)\qquad &b_{21} l_k + (b_{22} - i_k^2) m_k + b_{23} n_k = 0, \qquad (k = 1, \\
&b_{31} l_k + b_{32} m_k + (b_{33} - i_k^2) n_k = 0.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, daß die *Quadrate der Hauptinvarianten* i_1 und i_2 die Wurze
der *Hauptachsengleichung*

$$
(26)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} - i^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - i^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - i^2 \end{vmatrix} = 0
$$

sind. Diese besitzt *reelle, positive* Wurzeln. Die dritte Wurzel ist =
da $|b_{ik}| = A_{44}^2 = 0$ ist. Aus (25) bestimmen sich die *Richtungskosinus d*
Nebenachsen und wenn man will auch die der Hauptachse für $i_k^2 = 0$. Der
multipliziert man die drei Gleichungen (23) der Reihe nach mit a_{1i}, a_{2i}, a
$(i = 1, 2, 3)$ und addiert jedesmal, so ergibt sich (25) für $k = 3$ und $i_k^2 =$
Die l_k, m_k, n_k sind so zu bestimmen, daß sie eine orthogonale Substituti
der Determinante $+1$ bilden. Entsprechende Gleichungen erhält man f
R'. Aus der Gleichung

$$
-i_1 i_2 i_3 i_4 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 & i_1 X_{10} \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 & i_2 X_{20} \\ i_4 l_3 & i_4 m_3 & i_4 n_3 & i_4 X_{30} \\ 0 & 0 & 0 & i_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1' & m_1' & n_1' & X_{10}' \\ l_2' & m_2' & n_2' & X_{20}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_3' & m_3' & n_3' & X_{30}' \end{vmatrix},
$$

in der die erste Determinante den Wert $i_1 i_2 i_3 i_4$, die zweite den We
-1 besitzt, erhält man durch Multiplikation nach Spalten und mit B
achtung der Gleichungen (20) bis (22)

$$
(27)\qquad i_1 i_2 i_3 i_4 = -A.
$$

Daraus kann geschlossen werden, daß alle Invarianten von Null verschied
sind. Besitzt also die Gl. (26) eine Doppelwurzel, so kann diese nic
gleich Null sein. Wie oben, so leitet man aus (20) die Gl. (12) ab,
aber jetzt nur für $k = 1, 2$ gelten. Aus ihnen ergeben sich, nachdem

itiven Richtungen der Nebenachsen gewählt sind, die *Hauptinvarianten* i_2 mit ganz bestimmten Vorzeichen. Man sieht auch umgekehrt ein, durch geeignete Festsetzung der positiven Richtungen der Achsen bekt werden kann, daß i_1 und i_2 beliebige Vorzeichen erhalten.

Aus den Gl. (21) erhält man jetzt

$$\begin{aligned} i_1 X_{10} &= a_{14} l_1' + a_{24} m_1' + a_{34} n_1', & i_1 X_{10}' &= a_{41} l_1 + a_{42} m_1 + a_{43} n_1, \\ i_2 X_{20} &= a_{14} l_2' + a_{24} m_2' + a_{34} n_2', & i_2 X_{20}' &= a_{41} l_2 + a_{42} m_2 + a_{43} n_2, \\ i_3 &= a_{14} l_3' + a_{24} m_3' + a_{34} n_3'; & i_4 &= a_{41} l_3 + a_{42} m_3 + a_{43} n_3. \end{aligned}$$

Aus diesen lassen sich $X_{10}, X_{20}, X_{10}', X_{20}', i_3$ und i_4 eindeutig benmen. Mit Hilfe der Gl. (23) und ihren entsprechenden ist es auch nt schwer, die *Nebeninvarianten* i_3 und i_4 explizit durch die a_{ik} dartellen. Es fehlen jetzt nur noch die Größen X_{30} und X_{30}'. Aus (22) ibt sich

$$i_3 X_{30}' + i_4 X_{30} = a_{44} - (i_1 X_{10} X_{10}' + i_2 X_{20} X_{20}').$$

r tritt eine Unbestimmtheit auf: Bestimmt man nämlich irgend zwei len X_{30}, X_{30}', die (29) genügen, so ist diese Gleichung auch von $+\varrho i_3, X_{30}' - \varrho i_4$ befriedigt, wo ϱ beliebig bleibt. Dies geht auch (19) unmittelbar hervor; denn die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 + \varrho i_3 X_4, \quad x_4 = X_4, \\ x_1' &= X_1', \quad x_2' = X_2', \quad x_3' = X_3' - \varrho i_4 X_4', \quad x_4' = X_4', \end{aligned}$$

ϱ beliebig ist, transformiert die bilineare Gleichung (19) in sich. Dies eine merkwürdige Konsequenz: Die Gleichungen (30) bedeuten Transonen der Koordinatensysteme parallel zu den Hauptachsen. Ist also in Punkt von R, Π' die ihm entsprechende Ebene in R', so verebe man P in der Richtung der Hauptachse um den Betrag ϱi_3 S, zugleich übe man auf Π' in R' eine Translation parallel zur ptachse in R' im Betrag $-\varrho i_4$ aus, so daß Π' nach Σ' gelangt, n entspricht dem Punkt S in R die Ebene Σ' in R'. Die parabolische relation zeigt also einen *translatorischen* Charakter. Dies erinnert an Nullsystem. In der Tat wird sich sogleich zeigen, daß die Räume die Lage eines Nullsystems gebracht werden können, wenn $i_1^2 = i_2^2$, $= i_4^2$ und $A > 0$ ist.

Wie bei den zentralen Korrelationen, so ist auch hier zu bemerken, für $a_{ik} = a_{ki}$ das hier behandelte Problem nichts anderes ist als die uktion eines Paraboloids auf die Hauptebenen. Die Hauptebenen n in beiden Räumen zusammen (wenn x_i, x_i' in (1) auf dase System bezogen werden) mit den Hauptebenen des Paraboloids $_k x_i x_k = 0$ $(A_{44} = 0)$, in bezug auf welches (1) eine polare Reziprok definiert.

III. Unterklassen der parabolischen Korrelationen.

a) Rotatorische parabolische Korrelationen ($i_1^2 = i_2^2$).

Hat die *Hauptachsengleichung* (26) *zwei gleiche* Wurzeln, die dann nach dem Obigen von Null verschieden sind, so können die positiven Richtungen der Koordinatenachsen so festgelegt werden, daß die *Hauptinvarianten* i_1, i_2 selbst (nicht bloß ihre Quadrate) einander gleich sind. In diesem Falle wird die bilineare Gleichung (19), wie man leicht sieht, nicht geändert, wenn das Koordinatensystem in jedem der Räume um die Hauptachse um den beliebigen Winkel φ gedreht wird. Sind also Punkt P in R und Ebene Π' in R' entsprechende Elemente vor der Drehung und gehen sie durch die Drehung der Räume in S' bzw. Σ über, so sind auch dies entsprechende Elemente. Wir nennen die Korrelation *rotatorisch*. Es ist unmittelbar klar, welche Bedingungen die a_{ik} in (1) erfüllen müssen, damit die Korrelation parabolisch rotatorisch ist. Da nun auch entsprechende Translationen möglich sind, so zeigt eine derartige Korrelation *Schraubencharakter*. Tritt noch die Bedingung $i_3 = -i_4$ hinzu, so entspricht einer beliebigen Schraubung in R *dieselbe* Schraubung in R': dann können die Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden (s. unter d)).

b) Involutorische Korrelationen ($i_3^2 = i_4^2$).

Man kann fragen, welches die Bedingungen dafür sind, daß zwei durch parabolische Korrelation aufeinander bezogene Räume in polarreziproke Lage gebracht werden können. Zu diesem Zwecke beziehe man die Räume, die durch (19) reziprok aufeinander abgebildet sind, auf dasselbe Koordinatensystem. Jetzt verschiebe man den einen Raum beliebig gegen den anderen: sollen die Räume nunmehr in polarreziproker Lage sein, so muß die neue bilineare Gleichung, die aus (19) hervorgeht, symmetrisch sein. Führt man dies durch, so folgt $i_3^2 = i_4^2$. Mit Rücksicht auf die Raumverhältnisse der Zeitschrift unterdrücke ich den einfachen Beweis. Man kann annehmen, daß $i_3 = i_4$ ist; denn wäre $i_3 = -i_4$, so vertausche man i_2, i_4 mit $-i_2$, $-i_4$, was einer Umklappung des Raumes R um die X_1-Achse entspricht, und es ist jetzt $i_3 = i_4$. Ist aber $i_3 = i_4$, so definiert (19) eine Polarverwandtschaft in bezug auf das *Paraboloid*

$$i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + 2 i_3 X_3 X_4 = 0. \tag{31}$$

Die *Räume befinden sich also in polarreziproker Lage*. Wir nennen in diesem Falle die Korrelation *involutorisch*. Da die Räume noch durch Translation parallel zur Hauptachse gegeneinander verschoben werden können, so ist es auf unendlich viele Arten möglich, sie in polarreziprok

ge zu bringen. Klappt man den einen Raum um die Hauptachse um
Winkel π um, so liegt er auch jetzt noch zum anderen Raum in-
utorisch. Die Ordnungsfläche hat jetzt aber die Gleichung

) $$i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 - 2 i_3 X_3 X_4 = 0.$$

Auch in der neuen Lage können die Räume durch Translation gegen-
ander verschoben werden, ohne daß die involutorische Lage zerstört
d. Es ist nicht schwer, die Beziehung $i_3^2 = i_4^2$ direkt in den a_{ik}
uschreiben.

c) Die allgemeine parabolische Korrelation.

Ist $i_3^2 \neq i_4^2$, so ist es nach b) *nicht möglich, die Korrelation durch*
larität an einer Fläche zweiter Ordnung zu erzeugen. Es fragt sich
t, wie zu einem Punkt P in R die entsprechende Ebene Π' in R' zu
struieren ist. Zu diesem Zwecke führe man für den Raum R die
nlichkeitstransformation

$$X_1 = i_3 \bar{X}_1, \quad X_2 = i_3 \bar{X}_2, \quad X_3 = i_3 \bar{X}_3, \quad X_4 = i_4 \bar{X}_4$$

, dann geht (19) über in

) $$i_1 \bar{X}_1 X_1' + i_2 \bar{X}_2 X_2' + i_4 (\bar{X}_4 X_3' + \bar{X}_3 X_4') = 0.$$

Wird der transformierte Raum $\bar{R}$ und R' auf dasselbe System be-
en, so liegen sie jetzt involutarisch in bezug auf das Paraboloid

$$i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + 2 i_4 X_3 X_4 = 0;$$

mit ist die gesuchte Konstruktion unmittelbar gegeben.

d) Die Nullkorrelation ($i_1^2 = i_2^2$, $i_3^2 = i_4^2$, $A > 0$).

Welches sind nun die Bedingungen dafür, daß zwei parabolisch
relativ aufeinander bezogene Räume sich derart orientieren lassen, daß
ein Nullsystem bilden? Man verfahre wie am Anfang von b); die
e bilineare Gleichung muß dann schiefsymmetrisch sein ($a_{ik} = -a_{ki}$,
$= 0$). Man findet entweder $i_1 = i_2$, $i_3 = -i_4$ oder $i_1 = -i_2$, $i_3 = i_4$;
h hier möge der einfache Beweis unterdrückt werden. Beide Fälle
l nicht wesentlich verschieden; sie können nach (27) durch die gemein-
en Bedingungen $i_1^2 = i_2^2$, $i_3^2 = i_4^2$, $A > 0$ charakterisiert werden. Setzen
voraus, daß $i_1 = i_2$, $i_3 = -i_4$ ist, also die bilineare Gleichung (19)

) $$X_1 X_1' + X_2 X_2' - \frac{i_4}{i_1} X_4 X_3' + \frac{i_4}{i_1} X_3 X_4' = 0$$

et, und setzt man

) $$\frac{i_4}{i_1} = k,$$

so ist die korrelative Beziehung beider Räume gegeben durch die Gleichung

$$X_1 X_1' + X_2 X_2' - k X_4 X_3' + k X_3 X_4' = 0. \tag{36}$$

Wir beziehen jetzt die beiden Räume auf dasselbe Koordinatensystem und drehen den Raum R um die Hauptachse (X_3-Achse) in positivem Sinne um $\frac{\pi}{2}$, so also, daß X_1, X_2 in $X_2, -X_1$ übergehen; dann lautet die Gleichung (36), welche die Abbildung der so orientierten Räume vermittelt,

$$X_2 X_1' - X_1 X_2' - k X_4 X_3' + k X_3 X_4' = 0. \tag{37}$$

Da jetzt die bilineare Gleichung *schiefsymmetrisch* ist, so ist durch (37) ein *Nullsystem* definiert. Damit ist erwiesen, daß die Bedingungen $i_1 = i_2$, $i_3 = -i_4$ hinreichend dafür sind, daß die bezogenen Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden können. Man hätte den Raum R auch um $\frac{\pi}{2}$ im negativen Sinne um die Hauptachse drehen können und die Räume wären wieder in die Lage der Nullkorrelation gekommen. Man hätte eine Gleichung erhalten, die aus (37) durch Vertauschen von k mit $-k$ hervorgeht. Dies war nach bekannten Eigenschaften des Nullsystems vorauszusehen. Der *Parameter k des Nullsystems* (37), der durch (35) mit den Invarianten verknüpft ist, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Sieht man in (37) X_i als feste Koordinaten, X_i' als veränderliche an, so stellt (37) die Nullebene des Punktes X_i dar; berechnet man ihren Neigungswinkel ϑ gegen die Hauptachse des Nullsystems (X_3-Achse), so erhält man die bekannte Beziehung

$$r \operatorname{tg} \vartheta = k, \tag{38}$$

wo r der Abstand des Nullpunktes von der Hauptachse ist.

Die Bedingungen $i_1^2 = i_2^2$, $i_3^2 = i_4^2$, $A > 0$ für die Nullkorrelation drücken aus, *daß die Nullkorrelation eine rotatorische, involutorische, parabolische Reziprozität mit positiver Determinante ist.* Nach der gegebenen Klassifikation ist es evident, welche Beziehungen zwischen den Koeffizienten a_{ik} in (1) bestehen müssen, damit die durch (1) aufeinander bezogenen Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden können. Auch der bekannte Schraubencharakter des Nullsystems („Strahlengewinde") ist nach den allgemeinen Erörterungen von oben verständlich: Es ist dies eine Eigenschaft, die allen rotatorischen Korrelationen und nicht bloß dem Nullsystem zukommt.

Da die Bedingung $i_3^2 = i_4^2$ erfüllt ist, so *muß es nach* b) *möglich sein, das Nullsystem durch Polarität an einem Paraboloid abzuleiten.* Dies ist in der Tat der Fall: Ersetzt man nämlich in (37) X_1, X_2, X_3 der Reihe nach durch $X_2, X_1, -X_3$, so geht (37) in

9) $$X_1 X_1' - X_2 X_2' - k X_4 X_3' - k X_3 X_4' = 0$$

er, d. h. in die Gleichung der Polarebene in bezug auf das gleichseitig perbolische Paraboloid

0) $$X_1^2 - X_2^2 - 2 k X_3 X_4 = 0 .$$

Konstruiert man also in jedem Punkt P des Raumes in bezug auf s gleichseitige hyperbolische Paraboloid (40) *die Polarebene Π' und eht den Punkt um die Scheitelgerade $X_1 = X_2$, $X_3 = 0$ des Paraboloids n den Winkel π, so fällt der gedrehte Punkt in die Ebene Π'. Man ält so ein Nullsystem mit dem Parameter k, dessen Achse die Para-oidachse ist. Erfolgt die Drehung um die andere Scheitelgerade, so ält man ein Nullsystem mit dem Parameter $-k$.*

Dieser Satz, den Magnus[4]) auf anderem Wege gefunden hat, und enso der folgende von Hauck[5]) folgt mit notwendiger Konsequenz aus gegebenen Theorie.

Da $i_1 = -i_2$, $i_3 = i_4$ die Bedingungen für das Nullsystem sind und rch eine Spiegelung an einer Koordinatenebene i_2 in $-i_2$ übergeführt rden kann, so ergibt sich, *daß das Nullsystem auch durch Polarität einem Rotationsparaboloid, verbunden mit einer Spiegelung, sich ab-ten lassen muß.* In der Tat, ersetzt man in (37) X_1, X_2, X_3 der ihe nach durch $-X_2$, X_1, $-X_3$, so geht diese Gleichung in die Glei-ung der Polarebene

1) $$X_1 X_1' + X_2 X_2' - k X_4 X_3' - k X_3 X_4' = 0$$

bezug auf *das Rotationsparaboloid*

2) $$X_1^2 + X_2^2 - 2 k X_3 X_4 = 0$$

er.

Konstruiert man also zu jedem Raumpunkt P in bezug auf das tationsparaboloid (42) *die Polarebene Π', dreht den Punkt P um die tationsachse in positivem Sinne um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ und spiegelt ihn n an der Scheiteltangentialebene, so fällt der transformierte Punkt in Ebene Π', und man erhält so ein Nullsystem mit dem Parameter k. rd die Drehung im negativen Sinne ausgeführt, so erhält man ein llsystem mit dem Parameter $-k$.*

Übrigens läßt sich dies kürzer, als es bei Hauck geschieht, folgender-ßen rein geometrisch einsehen. Ist P ein Punkt, Π' seine Polarebene bezug auf das Rotationsparaboloid, Q der Fußpunkt des Lotes von P

[4]) L. J. Magnus, a. a. O. S. 320.

[5]) G. Hauck, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **31** (1886), S. 362.

auf die Achse und S der Schnittpunkt von Π' mit der Achse, so ist unmittelbar zu sehen, daß $QO = OS$ ist, wo O der Scheitel des Paraboloids ist. Beachtet man noch, daß Π' auf der durch P gehenden Meridianebene senkrecht steht, so ist klar, daß der Punkt nach jener Drehung und Spiegelung in Π' fällt. Verschiebt man Π' parallel mit sich, so verschiebt sich P parallel zur Achse: daraus folgt die Translationseigenschaft des Nullsystems und die Rotationseigenschaft, weil das Paraboloid eine Rotationsfläche ist. Damit ist ein elementarer Zugang zum Nullsystem und seinen wichtigsten Eigenschaften gegeben.

Stuttgart, den 14. Juni 1920.

(Eingegangen am 14. Juli 1920.)

Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme.

Von

M. Lagally in Dresden.

1. Die Bewegung eines einzelnen Wirbelpunktes in einem ebenen, dlichen oder ins Unendliche reichenden, einfach zusammenhängenden biet, das von einer im übrigen ruhenden oder in Potentialbewegung bedlichen Flüssigkeit erfüllt ist, vollzieht sich, wie Routh[1]) bemerkt hat, rade so, als ob der Wirbel ein gewöhnliches Flüssigkeitsteilchen einer vissen nicht wirbelfreien Strömung wäre, die dasselbe Gebiet erfüllt. e zugehörige Stromfunktion, im folgenden Routhsche Stromfunktion nannt und mit χ bezeichnet, hängt wesentlich von der Begrenzung s Gebietes ab und ist von diesem Gesichtspunkt aus neuerdings von ldonazzo[2]) behandelt und zum Ausgangspunkt von Gleichgewichts- und abilitätsuntersuchungen gemacht worden. Die Bedeutung der Routhen Stromfunktion liegt darin, daß sie bei konformer Abbildung des bietes in einfacher Weise transformiert wird; daß sie also die Wirbelin in dem Bildgebiet ergibt, wenn diese in dem gegebenen Gebiet bent war.

Die Bewegung einer endlichen Anzahl von Wirbelpunkten in einer ganze Ebene erfüllenden, sonst *ruhenden* Flüssigkeit hat Kirchhoff[3])

---

[1]) Routh, Some Applications of Conjugate Funktions. Proceedings of the Lon Mathematical Society, 12 (1880—81), S. 73—88, besonders S. 83. Vgl. Encyclodie der Math. Wiss. IV, 16 (Love) 1e, S. 93.

[2]) Caldonazzo, Sul moto di un vortice puntiforme. Rendiconti della R. Akania dei Lincei, 28 (1919), S. 191—195, 301—303, 325—329.

[3]) Kirchhoff, Mechanik, S. 258—262. — Spezielle Fälle behandeln u. a.: Gröbli, zielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden, Diss. tingen 1877. — Etwas allgemeiner: Lagally, Über die Bewegung einzelner Wirbel iner strömenden Flüssigkeit, Sitzungsber. der K. bayr. Akad. d. Wiss., Jahrg. (1914), 77—432.

im Anschluß an Helmholtz untersucht und eine im folgenden als Kirchhoffsche Bahnfunktion Ω bezeichnete Funktion der veränderlichen Örter sämtlicher Wirbelpunkte eingeführt, durch deren Differentialquotienten nach den Koordinaten sich die Geschwindigkeiten der Wirbelpunkte darstellen lassen.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit der Bewegung einer endlichen Anzahl von Wirbelpunkten in beliebigen, von Potentialströmung erfüllten, einfach zusammenhängenden Gebieten. Es zeigt sich, daß in diesem Fall *für jeden einzelnen Wirbel eine Routhsche Stromfunktion existiert*, die in derselben Weise wie bei *einem* Wirbel bei konformer Abbildung transformiert wird; allerdings werden hierdurch nicht mehr die endlichen Gleichungen der Wirbelbahnen gegeben und transformiert, sondern ihre Differentialgleichungen. Ferner ergibt sich stets *die Existenz einer Kirchhoffschen Bahnfunktion*, welche in ähnlicher Weise transformiert wird, deren Kenntnis die Kenntnis der Routhschen Funktionen für sämtliche Wirbel ersetzt und welche außerdem zur Aufstellung gewisser Integrale führt, die in manchen Fällen zur Auffindung der Wirbelbahnen und des Verlaufs der Bewegung genügen.

2. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet T_0 soll eine eindeutige oder auch, wenn das Gebiet den unendlich fernen Punkt enthält, zyklische Potentialströmung herrschen:

$$W_0(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta),$$

in der an den n Stellen $\zeta = \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ freie Wirbel vorhanden sind. Ihr komplexes Potential

$$w_k = \varphi_k + i\psi_k = -i\mu_k \lg(\zeta - \gamma_k) \tag{1}$$

ergibt das Geschwindigkeitspotential φ_k und die Stromfunktion ψ_k:

$$\varphi_k = \mu_k \operatorname{arctg} \frac{\eta - \beta_k}{\xi - \alpha_k}; \qquad \psi_k = -\mu_k \lg \sqrt{(\xi - \alpha_k)^2 + (\eta - \beta_k)^2};$$

$\Phi + i\Psi$ soll im allgemeinen mit der Zeit veränderlich sein, nicht indem es die Zeit unabhängig enthält, sondern indem es von der augenblicklichen Lage der Wirbelpunkte $w_k(\alpha_k, \beta_k)$ abhängt; das ist namentlich dann der Fall, wenn sich außerhalb T_0 als singuläre Stellen von W_0 noch weitere freie Wirbelpunkte w_k' befinden, die als Bilder der Wirbel w_k aufzufassen sind und sich unter dem Einfluß der w_k bewegen, wie diese sich unter dem ihrigen.

Außer den freien Wirbeln können feste Singularitäten in T_0 zugelassen werden.

Dann ist die Bahngeschwindigkeit eines Wirbels w_k:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_k}{dt} &= \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} + \sum_i{}' \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}}, \\ \frac{d\beta_k}{dt} &= -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} - \sum_i{}' \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}}. \end{aligned}\right.$$

ei der Summation ist der Index $i = k$ wegzulassen, was durch den Strich m Summenzeichen angedeutet ist.

Setzt man die Entfernung

$$\sqrt{(\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i - \beta_k)^2} = \varrho_{ik},$$

wird

$$\left\{\begin{aligned} \sum_i{}' \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} &= -\sum_i{}' \mu_i \frac{\partial \lg \varrho_{ik}}{\partial \beta_k}, \\ -\sum_i{}' \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} &= +\sum_i{}' \mu_i \frac{\partial \lg \varrho_{ik}}{\partial \alpha_k}. \end{aligned}\right.$$

ie zweiten Teile der Ausdrücke für die Bahngeschwindigkeiten $\frac{d\alpha_k}{dt}$, $\frac{d\beta_k}{dt}$ ssen sich also durch Differentialquotienten einer Funktion nach β_k und $-\alpha_k$ darstellen; ob entsprechendes für die ersten Teile gilt, läßt sich nicht nmittelbar ersehen, da diese α_k, β_k außer in den Werten von ξ, η auch nabhängig enthalten können.

Wenn jedoch für die Bahngeschwindigkeit eines Wirbels w_k Gleichungen on der Form gelten:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial \chi_k}{\partial \beta_k}, \qquad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_k},$$

o nennen wir χ_k eine Routhsche Stromfunktion.

In zwei Fällen läßt sich die Existenz einer Routhschen Stromfunkon sofort erkennen:

a) Wenn das Gebiet T_0 die ganze Ebene ist und $\Phi + i\Psi$ ein in der anzen Ebene mit Ausnahme fester singulärer Punkte reguläres komplexes otential; dann ist $\Psi(\xi, \eta)$ von den α_i, β_i unabhängig und folglich:

$$\left[\frac{\partial \Psi(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} = \frac{\partial \Psi(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \alpha_k}, \qquad \left[\frac{\partial \Psi(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} = \frac{\partial \Psi(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \beta_k},$$

Es existiert also für jeden Wirbel eine Routhsche Stromfunktion:

$$\chi_k = \Psi(\alpha_k, \beta_k) - \sum_i{}' \mu_i \lg \varrho_{ik}.$$

b) Wenn T_0 die obere Halbebene $(y > 0)$ ist und wenn sich $\Phi + i\Psi$ us einer zur x-Achse symmetrischen, in der ganzen Ebene bis auf feste nguläre Punkte regulären Potentialströmung $\Phi_0 + i\Psi_0$, und aus der von

den Spiegelbildern $\overline{w}_k$ der Wirbel w_k von T_0 an der x-Achse hervorgebrachten, mit der Zeit veränderlichen, von den α_k, β_k abhängigen in T_0 regulären Potentialströmung additiv zusammensetzt. Bezeichnet man nämlich den Abstand eines Wirbelpunktes w_i von dem Bildwirbel $\overline{w}_k$ von w_k mit $\bar{\varrho}_{ik}$,

$$\bar{\varrho}_{ik} = \bar{\varrho}_{ki} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_k)^2 + (\beta_i + \beta_k)^2}, \qquad \bar{\varrho}_{kk} = 2\beta_k$$

und führt die Stromfunktion der Potentialströmung ein:

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_i \mu_i \lg \sqrt{(\xi - \alpha_i)^2 + (\eta + \beta_i)^2},$$

so wird

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} = \frac{\partial \Psi_0(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \beta_k} + \sum_i{}' \mu_i \frac{\partial \lg \bar{\varrho}_{ik}}{\partial \beta_k} + \frac{\mu_k}{2\beta_k}$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=\alpha_k \\ \eta=\beta_k}} = \frac{\partial \Psi_0(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \alpha_k} + \sum_i{}' \mu_i \frac{\partial \lg \bar{\varrho}_{ik}}{\partial \alpha_k}.$$

Es existiert also wieder für jeden Wirbel eine Routhsche Stromfunktion:

$$\chi_k = \Psi_0(\alpha_k, \beta_k) + \sum_i{}' \mu_i \lg \frac{\bar{\varrho}_{ik}}{\varrho_{ik}} + \frac{\mu_k}{2} \lg \beta_k. \tag{6}$$

3. Routh hat sich, von allgemeinen Bemerkungen über die Bewegung mehrerer Wirbel in T_0 abgesehen, auf den Fall beschränkt, daß nur *ein* freier Wirbel in T_0 vorhanden ist. Dann gibt $\chi = \text{const.}$ die Wirbelbahn. Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der Bewegung erfordert eine Elimination und eine Quadratur. Beim Vorhandensein von n Wirbeln in T_0 ermöglichen die n Funktionen χ_k die Aufstellung der $2n$ Bewegungsgleichungen; diese enthalten die $2n$ Koordinaten und die Zeit und lassen ohne Integration nur die Geschwindigkeiten in jedem Zeitpunkt bei gegebener Verteilung der Wirbelpunkte erkennen.

Indessen werden die Funktionen χ_k bei konformer Abbildung des Gebietes T_0 auf ein Gebiet T genau so transformiert, wie das Routh für die Funktion χ nur eines Wirbels angegeben hat. Wird die Abbildung durch die Gleichung $\zeta = f(z)$ geleistet, wo $f(z)$ in T regulär und eindeutig ist, so geht aus $W_0(\zeta)$ ein neues komplexes Potential $W(z)$ hervor, das in dem betrachteten Zeitpunkt die Geschwindigkeit aller regulären Flüssigkeitsteilchen in T erkennen läßt. Die Abbildung ordnet auch in dem betrachteten Zeitpunkt jedem Wirbelpunkt $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ einen Bildwirbel $c_k = a_k + ib_k$ zu, wobei unter den die Gleichung $\gamma_k = f(c_k)$ erfüllenden Werten c_k derjenige zu nehmen ist, der in das Gebiet T fällt. Dieser Wirbel w_k in T ist also im allgemeinen nicht als das alleinige Bild des Wirbels w_k in T_0 aufzufassen; seine augenblickliche Bewegung wird des-

lb auch nicht durch die Potentialströmung geleitet, die durch die kon-
me Abbildung aus der Potentialströmung $W_0'(\zeta)$ hervorgeht, welche die
wegung des Wirbels w_k in T_0 leitet und welche aus $W_0(\zeta)$ durch Weg-
sung von w_k hervorgeht:

$$W_0'(\zeta) = W_0(\zeta) + i\mu_k \lg(\zeta - \gamma_k),$$

ıdern durch diejenige Potentialströmung $W'(z)$, welche aus der Bild-
ömung $W(z)$ von $W_0(\zeta)$ durch Weglassung des Bildwirbels w_k in T
tsteht:

$$W'(z) = W(z) + i\mu_k \lg(z - c_k).$$

eil infolge der Abbildung $W(z) = W_0(\zeta)$ ist, wird

$$W'(z) = W_0'(\zeta) - i\mu_k \lg \frac{f(z) - f(c_k)}{z - c_k}.$$

ıbei ist zu bemerken, daß $W'(z)$ und $W_0'(\zeta)$ an den Stellen $z = c_k$
w. $\zeta = \gamma_k$ reguläre Funktionen sind.

Jetzt ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Bahngeschwindigkeit
s Wirbels w_k in T_0 und seines Bildwirbels w_k in T; erstere ist

$$\frac{d\alpha_k}{dt} - i\frac{d\beta_k}{dt} = u_{0k} - iv_{0k} = \left[\frac{dW_0'}{d\zeta}\right]_{\zeta=\gamma_k},$$

ztere

$$\frac{da_k}{dt} - i\frac{db_k}{dt} = u_k - iv_k = \left[\frac{dW'}{dz}\right]_{z=c_k}.$$

ırch Differentiieren der Beziehung zwischen $W'(z)$ und $W_0'(\zeta)$ folgt:

$$u_k - iv_k = (u_{0k} - iv_{0k})\left[\frac{d\zeta}{dz}\right]_{z=c_k} - i\mu_k \lim_{z=c_k} \frac{d}{dz} \lg \frac{f(z) - f(c_k)}{z - c_k}.$$

egen

$$\frac{f(z) - f(c_k)}{z - c_k} = f'(c_k) + \frac{1}{2}(z - c_k) f''(c_k) + \ldots$$

ibt sich

$$u_k - iv_k = (u_{0k} - iv_{0k}) f'(c_k) - \frac{i\mu_k}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(c_k)}.$$

tzt man jetzt, um reellen und imaginären Teil zu trennen,

$$f'(c_k) = \frac{d(\alpha_k + i\beta_k)}{d(a_k + ib_k)} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial a_k} + i\frac{\partial \beta_k}{\partial a_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial b_k} - i\frac{\partial \alpha_k}{\partial b_k}$$

d anderseits auch

$$f'(c_k) = |f'(c_k)| e^{i\vartheta_k},$$

$$\frac{f''(c_k)}{f'(c_k)} = \frac{d}{dc_k}(\lg|f'(c_k)| + i\vartheta_k) = \frac{\partial}{\partial a_k} \lg|f'(c_k)| - i\frac{\partial}{\partial b_k} \lg|f'(c_k)|,$$

ergibt sich

$$u_k - iv_k = \left(u_{0k}\frac{\partial \beta_k}{\partial b_k} - v_{0k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial b_k}\right) + i\left(u_{0k}\frac{\partial \beta_k}{\partial a_k} - v_{0k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_k}\right)$$
$$- \frac{\mu_k}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial a_k}\lg|f'(c_k)| + \frac{\partial}{\partial b_k}\lg|f'(c_k)|\right).$$

Wenn jetzt in T_0 eine Routhsche Stromfunktion χ_{0k} für den Wirbel w_k existiert, wenn also

$$u_{0k} = \frac{\partial \chi_{0k}}{\partial \beta_k}, \qquad v_{0k} = -\frac{\partial \chi_{0k}}{\partial \alpha_k}$$

ist, so folgt

$$u_k = \frac{\partial \chi_{0k}}{\partial b_k} - \frac{\mu_k}{2}\frac{\partial}{\partial b_k}\lg|f'(c_k)|; \qquad v_k = -\frac{\partial \chi_{0k}}{\partial a_k} + \frac{\mu_k}{2}\frac{\partial}{\partial a_k}\lg|f'(c_k)|.$$

Es existiert also auch für den Wirbel w_k in T eine Routhsche Stromfunktion χ_k, aus welcher sich die Bahngeschwindigkeiten

$$u_k = \frac{\partial \chi_k}{\partial b_k}, \qquad v_k = -\frac{\partial \chi_k}{\partial a_k}$$

ergeben und welche aus χ_{0k} durch die Transformation

$$\chi_k = \chi_{0k} - \frac{\mu_k}{2}\lg|f'(c_k)| \tag{8}$$

erhalten wird.

Ist speziell T_0 die obere Halbebene, so ist die Routhsche Stromfunktion im Bildgebiet T für den Wirbel w_k nach (6)

$$\chi_k = \Psi_0(\alpha_k, \beta_k) + \sum_i{}' \mu_i \lg\frac{\bar{\varrho}_{ik}}{\varrho_{ik}} + \frac{\mu_k}{2}\lg\frac{\beta_k}{|f'(c_k)|}, \tag{8a}$$

wo für α_k, β_k zufolge der Abbildungsgleichung $\gamma_k = f(c_k)$ die Größen a_k, b einzuführen sind. Damit *ist die Existenz von χ_k für jedes einfache zusammenhängende Gebiet T nachgewiesen und seine Auffindung auf die Aufgabe zurückgeführt, T konform auf die Halbebene abzubilden.*

4. Eine Funktion $\Omega(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$ der Koordinaten sämtlicher Wirbelpunkte soll Kirchhoffsche Bahnfunktion heißen, wenn sich aus ihr die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung sämtlicher Wirbel mittels der Gleichungen

$$\mu_k\frac{da_k}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}, \qquad \mu_k\frac{db_k}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_k} \tag{9}$$

ergeben, wenn sie also mit den Routhschen Stromfunktionen sämtlicher Wirbel durch die Gleichungen zusammenhängt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_k} = \mu_k\frac{\partial \chi_k}{\partial a_k}, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial b_k} = \mu_k\frac{\partial \chi_k}{\partial b_k}. \tag{10}$$

Ihre Existenz ist in zwei Fällen unmittelbar zu erkennen:

a) Für die Bewegung von Wirbeln in der ganzen Ebene, in der außer- eine bis auf Punkte reguläre Potentialströmung herrscht:

$$\Omega = \sum_k \mu_k \Psi(\alpha_k, \beta_k) - \sum_i \sum_k \mu_i \mu_k \lg \varrho_{ik},$$

der Vergleich mit (5) erkennen läßt. Dabei ist die Doppelsumme so ilden, daß von zwei Summanden, die sich nur durch die Reihenfolge Indizes unterscheiden, nur der eine auftritt.

b) Für die Bewegung von Wirbeln in der oberen Halbebene läßt (6) Kirchhoffsche Funktion

$$\Omega = \sum_k \mu_k \Psi_0(\alpha_k, \beta_k) + \sum_i \sum_k \mu_i \mu_k \lg \frac{\bar{\varrho}_{ik}}{\varrho_{ik}} + \sum_k \frac{\mu_k^2}{2} \lg \beta_k$$

nnen.

Allgemein läßt sich zeigen, daß durch konforme Abbildung eines Ge- es T_0, in dem eine Wirbelbewegung besteht, welche eine Kirchhoffsche ktion Ω_0 besitzt, wieder eine Wirbelbewegung in einem Gebiet T ent- t, für welche eine Kirchhoffsche Funktion Ω existiert.

Sei in T_0

$$\mu_k \frac{\partial \chi_{0k}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial \alpha_k}, \qquad \mu_k \frac{\partial \chi_{0k}}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta_k},$$

st für beliebiges k

$$\Omega_0 = \mu_k \chi_{0k} + F'(\alpha_i, \beta_i),$$

F' eine von den Koordinaten sämtlicher Wirbelpunkte außer w_k ab- gige Funktion bedeutet.

Durch Anwendung der Routhschen Transformation (8) ergibt sich in T:

$$\mu_k \chi_k = \Omega_0 - F'(\alpha_i, \beta_i) - \frac{\mu_k^2}{2} \lg |f'(c_k)|.$$

rt man jetzt eine Funktion Ω mittels der Gleichung

$$\Omega = \Omega_0 - \sum_i \frac{\mu_i^2}{2} \lg |f'(c_i)|$$

so gilt für jeden Wert von k eine Gleichung von der Form:

$$\mu_k \chi_k = \Omega - F'(\alpha_i, \beta_i) + \sum_i{}' \frac{\mu_i^2}{2} \lg |f'(c_i)|,$$

der Strich am Summenzeichen das Fehlen des Summanden mit dem ex $i = k$ anzeigt. Also ist

$$\mu_k \frac{\partial \chi_k}{\partial a_k} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}, \qquad \mu_k \frac{\partial \chi_k}{\partial b_k} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_k},$$

. die durch die Transformationsgleichung (13) definierte Funktion Ω Kirchhoffsche Bahnfunktion für die Wirbelbewegung im Gebiet T.

Nimmt man wieder für T_0 die Halbebene, so folgt, daß *für jede Bewegung von Wirbelpunkten in einem einfach zusammenhängenden, auf die Halbebene konform abbildbaren Gebiet T,* in dem außerdem eine bis auf feste singuläre Punkte reguläre Potentialströmung herrscht, *eine Kirchhoffsche Bahnfunktion Ω existiert.*

Diese läßt sich nach (12) und (13) allgemein angeben:

$$(14) \qquad \Omega = \sum_k \mu_k \Psi_0(\alpha_k, \beta_k) + \sum_i \sum_k \mu_i \mu_k \lg \frac{\bar{\varrho}_{ik}}{\varrho_{ik}} + \sum_k \frac{\mu_k^2}{2} \lg \frac{\beta_k}{|f'(c_k)|}.$$

Die Hauptbedeutung der Funktion Ω besteht darin, daß *die Gleichung*

$$(15) \qquad \Omega = \text{konst.}$$

ein Integral der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen ist. Multipliziert man nämlich die Gleichungen (9) mit db_k bez. $-da_k$, so folgt

$$\sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k} da_k + \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k} db_k = d\Omega = 0.$$

5. Die anderen von Kirchhoff für die Bewegung einzelner Wirbel in der ganzen, von im übrigen ruhender Flüssigkeit erfüllten Ebene aufgestellten Integrale gelten nicht für begrenzte Gebiete. Immerhin ergeben sich einige Anwendungen.

Definiert man durch die Gleichungen:

$$\sum_k \mu_k \cdot x_0 = \sum_k \mu_k a_k, \qquad \sum_k \mu_k \cdot y_0 = \sum_k \mu_k b_k$$

den Schwerpunkt x_0, y_0 eines Wirbelsystems, so geben nach (9) die Gleichungen

$$\sum_k \mu_k \cdot \frac{dx_0}{dt} = \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}, \qquad \sum_k \mu_k \cdot \frac{dy_0}{dt} = -\sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}$$

seine Geschwindigkeit.

Für die Wirbelbewegung in der Halbebene folgt aus (12), wenn die Potentialströmung Ψ_0 fehlt oder höchstens eine Translation parallel zur x-Achse ist:

$$(16) \qquad \frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad \sum_k \mu_k b_k = \text{konst.}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also auf einer Parallelen zur Grenzgeraden der Halbebene.

Ein ähnlicher Satz gilt für die Bewegung in einem durch einen Kreis begrenzten Gebiet. Die obere Halbebene wird auf das Äußere oder Innere des Einheitskreises durch die Gleichung

$$\zeta = f(z) = \frac{1 \pm iz}{z \pm i}$$

gebildet. Die Funktion Ω ergibt sich durch Spezialisieren von (14). Einführung von Polarkoordinaten

$$a_k = r_k \cos\varphi_k; \qquad b_k = r_k \sin\varphi_k$$

d

$$) \quad \Omega = \sum_k \mu_k \Psi_0(a_k, \beta_k) + \sum_i \sum_k \frac{\mu_i \mu_k}{2} \lg \frac{1 - 2 r_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_k) + r_i^2 r_k^2}{r_i^2 + r_k^2 - 2 r_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_k)}$$

$$+ \sum_k \frac{\mu_k^2}{2} \lg (r_k^2 - 1).$$

Bewegungsgleichungen (9) gehen über in

$$) \qquad \mu_k r_k \frac{dr_k}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_k}; \qquad \mu_k r_k \frac{d\varphi_k}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r_k}.$$

nn Ψ_0 fehlt oder doch von φ frei ist, wird nach (17)

$$) \quad \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_k} = 0; \quad \text{also} \quad \sum_k \mu_k r_k \frac{dr_k}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_k \mu_k r_k^2 = \text{konst.}$$

s polare Trägheitsmoment des Wirbelsystems in bezug auf den Kreis-ttelpunkt ändert sich im Lauf der Bewegung nicht.

Unter Benutzung der Integrale (15) und (19) läßt sich die *Bewegung ier Wirbel in einem von einem Kreis begrenzten Gebiet* in ähnlicher ise *auf Quadraturen zurückführen*, wie das Gröbli[4]) für zwei Wirbel der Halbebene gezeigt hat.

Ist allgemein die Bewegung nur zweier Wirbel in einem Gebiet T zu ersuchen, so kann die Gleichung $\Omega(a_1, b_1, a_2, b_2) = \text{konst.}$ als Ausdruck er Berührungstransformation aufgefaßt werden. *Wenn nun die Bewegung einen Wirbels bekannt ist, so erfordert die Bestimmung der Bewegung anderen nur Eliminationen.*

[4]) Vgl. Fußnote [3]).

(Eingegangen am 7. August 1920.)

Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

(Erste Mitteilung.)[1])

Von

Hans Hamburger in Berlin.

In der vorliegenden Mitteilung wird der Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei $f(s)$ eine in der ganzen komplexen Zahlenebene definierte eindeutige analytische Funktion mit den vier Eigenschaften:*

a) *$f(s)$ besitze im Endlichen höchstens endlich viele Pole beliebiger Ordnung;*

b) *es mögen zwei positive Konstanten r und γ existieren derart, daß $f(s)$ für $|s| \geqq r$ im Endlichen regulär ist und sich dort durch die Beziehung*

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^{\gamma}}$$

abschätzen läßt;

c) *für $\sigma > 1$ werde $f(s)$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

definiert;

d) *$f(s)$ genüge der Riemannschen Funktionalgleichung*

$$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}}. \tag{I}$$

Dann ist $f(s)$ bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor a gleich der Riemannschen ζ-Funktion[2]).

[1]) Diese Mitteilung ist in der Sitzung am 3. Juni 1920 der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegt worden, konnte aber mit Rücksicht auf ihren Umfang und die gegenwärtigen Schwierigkeiten der Drucklegung nicht in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Vgl. auch die Note gleichen Titels des Verfassers, die in den Sitzber. der Berl. Math. Ges. 19. Jahrgang (1921) erscheinen wird.

[2]) Vgl. zu diesem Satze eine Bemerkung von Herrn Hadamard in seiner Arbeit Théorème sur les séries entières, Acta Math., 22 (1899), S. 63, Anmerkung 1.

Bei der Durchführung des Beweises zeigt sich, daß man die Voraus-
ung **d)** nicht in ihrem vollen Umfange benutzt. Bezeichnet man näm-
die in der ganzen Ebene definierte eindeutige analytische Funktion
$^{s+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s)$ mit $g(1-s)$, so besagt die Voraussetzung **d)**:

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1-s}} \quad \text{für} \quad \sigma < 0.$$

genügt aber im folgenden vorauszusetzen, daß sich $g(1-s)$ überhaupt
irgend eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$ entwickeln läßt, die in einer
vissen Halbebene $\sigma < -\alpha$, $(\alpha > 0)$ absolut konvergiert, oder anders
vendet:

d') *$f(s)$ genüge einer Funktionalgleichung der Form*

$$f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = g(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}},$$

*bei $g(1-s)$ eine Funktion bezeichnet, die sich für $\sigma < -\alpha$, unter α
e endliche positive Zahl verstanden, durch eine absolut konvergente
richletsche Reihe*

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$$

rstellen läßt.

Auch unter den Voraussetzungen **a), b), c)** *und* **d')** *ist*

$$f(s) = g(s) = a\,\zeta(s).$$

Um diesen Satz zu beweisen, wird im folgenden eine Methode an-
vendet, welche geeignet ist, die notwendigen und hinreichenden Be-
gungen dafür abzuleiten, daß eine Funktion, die die Voraussetzungen
b), c) erfüllt, der Funktionalgleichung (I) bzw. (II) genügt; hinreichend
ofern, als sich am Schlusse dieser Note als Nebenresultat ein neuer Be-
is für die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion ergibt.

In zwei weiteren Mitteilungen soll mit derselben Methode die Funktional-
ichung der Dirichletschen L-Reihen, die beim Studium der Primzahlen
einer arithmetischen Progression auftreten, untersucht werden. Diese
agestellung führt auf das Problem: alle Funktionen anzugeben, die die
raussetzungen **a), b), c)** erfüllen und einer Funktionalgleichung der Form
) genügen, wobei jetzt aber $g(1-s)$ eine Funktion bezeichnet, die sich
hinreichend kleine Werte von σ durch eine absolut konvergente
richletsche Reihe der allgemeineren Gestalt

$$g(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{l_n^{1-s}} \qquad (0<l_1<l_2<\ldots\to\infty$$

darstellen läßt.

Es wird sich zeigen, daß, wenn man außerdem $l_1 \geqq 1$ verlangt, sich mithin auf gewöhnliche Dirichletsche Reihen vom Typus

$$g(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\lambda_n(s-1)} \qquad (\lambda_n=\log l_n \geqq 0$$

beschränkt, wieder die ζ-Funktion die einzige ist, die sämtliche gestellten Bedingungen erfüllt.

Im Falle $l_1<1$ existieren hingegen unendlich viele untereinander verschiedene Funktionenpaare $f(s)$ und $g(1-s)$, die alle der Funktionalgleichung (II) genügen, und es gelingt alle Lösungen von (II) zu bestimmen, indem man notwendige und hinreichende Bedingungen für die b_n und l_n einerseits, und für die a_n andrerseits angibt[3]).

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Hilfssatz 1[4]). *Es sei $s=\sigma+it$ eine komplexe Veränderliche, $f(s)$ eine im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ reguläre analytische Funktion. Außerdem sei das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\sigma+it)|\,dt \tag{3}$$

für jeden Wert von σ des Intervalls $\alpha<\sigma<\beta$ konvergent und es sei

[3]) Vgl. die in Anm. [1]) zitierte Note des Verfassers.

[4]) Unter der wesentlich engeren Voraussetzung

$$|f(s)|\leqq Ce^{-\vartheta|t|} \quad \text{für} \quad \alpha<\sigma<\beta \quad \text{bei festem} \quad \vartheta>0$$

hat Herr Mellin die Hilfssätze I und II in einer Arbeit bewiesen, die unter dem Titel: Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, in den Math. Ann., 68 (1910), S. 305—337 erschienen ist. Vgl. insbes. S. 318—323.

Für den Fall, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes I nicht nur im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$, sondern in der ganzen Halbebene $\sigma>\alpha$ erfüllt sind, findet sich der Satz bei: S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. de l'école norm., 22 (1905), S. 1—68; vgl. insbes. S. 31—36. In diesem Falle wird $\varphi(x)=0$ für $x>1$.

Nachträglich bemerkt der Verfasser, daß der Hilfssatz I unter den Voraussetzungen des Textes bereits von Herrn M. Fujiwara bewiesen wurde: Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen in Dirichletsche Reihen. The Tohoku Math. Journ., 17 (1920), S. 363—383; vgl. insbes. S. 379—383. Mit Rücksicht darauf daß diese Arbeit schwer zugänglich ist, sei es gestattet, hier von neuem einen Beweis des Satzes zu veröffentlichen, zumal der Beweis des Textes kürzer als der auf anderen Prinzipien fußende Beweis des Herrn Fujiwara erscheint.

jedes noch so kleine positive von Null verschiedene δ gleichmäßig im eifen $\alpha + \delta \leqq \sigma \leqq \beta - \delta$

$$\lim_{t=\infty} f(s) = 0.$$

Setzt man

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} x^{-s} f(s)\, ds,$$

ist in dem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \varphi(x)\, dx,$$

l zwar ist das Integral dort absolut konvergent.

Beweis. Da die analytische Funktion $f(s)$ nach Voraussetzung im eifen $\alpha < \sigma < \beta$ keine Singularitäten besitzt, so hängt nach dem uchyschen Integralsatz wegen (4) das Integral rechter Hand von (5) ht von σ ab.

Wegen der absoluten Konvergenz des Integrals (3) folgt ferner aus (5)

$$|\varphi(x)| \leqq C(\sigma) x^{-\sigma}$$

jedes σ des Intervalls $\alpha < \sigma < \beta$. Hierbei sei unter $C(\sigma)$ eine endliche ıktion verstanden, die nur von σ aber nicht mehr von x abhängt.

Ist nunmehr $s_0 = \sigma_0 + it_0$ ein fester Punkt des Streifens $\alpha < \sigma < \beta$ l sind außerdem σ_1 und σ_2 zwei reelle Zahlen, die der Beziehung $< \sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2 < \beta$ genügen, so ergibt sich, da gleichzeitig

$$|\varphi(x)| \leqq C(\sigma_1) x^{-\sigma_1}, \quad |\varphi(x)| \leqq C(\sigma_2) x^{-\sigma_2}$$

daß das Integral

$$F(s_0) = \int_0^\infty x^{s_0 - 1} \varphi(x)\, dx$$

olut konvergiert.

Setzt man in $F(s_0)$ für $\varphi(x)$ seinen Wert aus (5) ein, so erhält man, em man in (5) $\sigma = \sigma_0$ setzt,

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dx \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} f(s)\, x^{s_0 - s - 1} ds,$$

r nach der Substitution $x = e^u$

$$s_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma_0 + it) e^{i(t_0 - t)u} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma_0 + it) \cos(t_0 - t)u\, dt\, du.$$

s ist aber das Fouriersche Integral und es folgt, da das Integral (3)

absolut konvergent vorausgesetzt ist, nach einem Satze von Herrn Jordan[5]

$$F(s_0) = f(\sigma_0 + it_0) = f(s_0)$$ w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Es sei das Integral*

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx$$

für $\alpha < \sigma < \beta$ konvergent und außerdem sei in diesem Streifen $f(s) = 0$. Dann ist auch $\varphi(x) = 0$ bis auf eine Menge vom Maße 0 [6]).

Beweis. Man setze

$$(7)\quad \begin{cases} F(s) = \int_0^1 x^{s-1}\varphi(x)dx = \int_1^\infty x^{-1-s}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx, \\ G(s) = \int_1^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx, \quad f(s) = F(s) + G(s). \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \int_1^x u^{\gamma-1}\varphi(u)du \qquad \left(0 \leqq x \leqq 1, \quad \gamma = \alpha + \frac{\delta}{2}\right).$$

Da nach Voraussetzung $F(s)$ für $s = \gamma$ konvergent ist, so bleibt $\Phi(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ unterhalb einer festen von x unabhängigen Schranke. Nunmehr ergibt die partielle Integration für $\sigma > \gamma$

$$F(s) = -(s-\gamma)\int_0^1 x^{s-\gamma-1}\Phi(x)dx$$

und man erkennt in bekannter Weise[7]), daß erstens $F(s)$ eine mindestens

---

[5]) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse, 2, 2. Aufl., Paris 1894, S. 233–235.

[6]) Offenbar genügt es, vorauszusetzen, daß $f(s)$ an unendlich vielen Stellen verschwindet, die im Endlichen einen Häufungspunkt haben.

Der Hilfssatz II ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Herrn Lerch: Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel, Acta Math. 27 (1903), S. 339–352. Auf den Lerchschen Satz wird auch naturgemäß der Beweis dieses Hilfssatzes zurückgeführt.

Unter der Voraussetzung, daß das Integral (6) absolut konvergiert, läßt sich auch umgekehrt für $\varphi(x)$ die Darstellung durch das konvergente Integral (5) beweisen, indem man es auf ein Fouriersches (oder Dirichletsches) Integral zurückführt. Vgl. die Arbeit des Verfassers, Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen, Math. Zeitschr., 6 (1920), S. 1–10, siehe insbes. S. 6–8, wo die Umkehrungsformel (5) für den Fall $\varphi(x) = 0$ für $0 \leqq x < 1$ bewiesen wird. Aus der Umkehrungsformel (5) folgt der Hilfssatz 2 unmittelbar. Doch erscheint der oben angegebene Beweis einfacher als der Beweis der Umkehrungsformel (5) und verlangt auch nicht, das Integral (6) absolut konvergent vorauszusetzen.

[7]) S. Pincherle, l. c. Anm. [2]) S. 14, vgl. auch E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzungsber. d. Math. Phys. Kl. d. Kgl. Bayer. Ak. der Wiss., 36 (1906), S. 151–218, siehe insbes. S. 210–212.

$\sigma \geqq \alpha + \delta$ reguläre analytische Funktion und daß zweitens ebenda, nn außerdem noch $|s| \geqq \delta$, bei passender Wahl einer Konstanten C

$$|F(s)| \leqq C|s|$$

Ebenso findet man, daß $G(s)$ eine mindestens für $\sigma \leqq \beta - \delta$ reguläre alytische Funktion ist, die dort außerhalb eines kleinen Kreises um den llpunkt der Beziehung

$$|G(s)| \leqq C'|s|$$

nügt.

Wegen der Voraussetzung $f(s) = 0$ ist aber

$$F(s) = -G(s),$$

d durch diese Beziehung ist $F(s)$ in der ganzen Ebene definiert; aus folgt ferner, daß $F(s)$ keine Singularitäten besitzt und daß, auf welchem ge man sich auch dem unendlich fernen Punkt nähert, $F(s)$ nicht stärker chst als konst $\cdot |s|$. Dann kann aber $F(s)$ höchstens eine lineare Funktion n, so daß sich nach zweimaliger Differentiation

$$F''(s) = -G''(s) = 0$$

ibt.

Da sich andererseits die Ableitungen nach s der Integrale (7) durch ferentiation unter dem Integralzeichen bilden lassen[8]), so erhält man für $\sigma \geqq \alpha + \delta$ bzw. $\sigma \leqq \beta - \delta$ konvergenten Integraldarstellungen

$$\begin{cases} F''(s) = \int_1^\infty x^{-1-s} \log^2 x \, \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx = 0, \\ G''(s) = \int_1^\infty x^{s-1} \log^2 x \, \varphi(x) \, dx = 0. \end{cases}$$

Nunmehr folgt die Behauptung des Hilfssatzes aus dem Satze von rn Lerch[9]):

Es sei für $\sigma \geqq \alpha + \delta$

$$F(s) = \int_1^\infty x^{-s-1} \Psi(x) \, dx = \int_0^\infty e^{-su} \Psi(e^u) \, du = 0;$$

n ist für jedes x

$$\int_1^x |\Psi(u)| \, du = 0.$$

---

[8]) Vgl. E. Landau, l. c. Anm. [7]), S. 212–214.

[9]) l. c. Anm. [6]). In der zitierten Arbeit wird der Satz unter wesentlich geringeren aussetzungen bewiesen. Es folgt nämlich schon $\int_1^\infty |\Psi(u)| \, du = 0$, wenn man nur weiß, $F(s)$ in den unendlich vielen Punkten $s = s_0 + \nu k$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots \to \infty$) ver- vindet, unter k eine beliebige reelle Zahl verstanden.

Die Beziehungen (8) können demnach nicht bestehen, ohne daß $\varphi(x)$ bis auf eine Menge vom Maße 0 verschwindet, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Es ist für* $-1<\sigma<0$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}(\cos 2x-1)\,dx \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{s-1}\sin 2x\,dx \tag{10}$$

Beweis. Nach bekannten Formeln aus der Theorie der Γ-Funktion ergibt sich

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\frac{\sin\frac{\pi(1-s)}{2}}{\pi}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}, \tag{11}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}=\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\pi}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{-s}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}. \tag{12}$$

Indem man diese Formeln benutzt, (10) mit i multipliziert und zu (9) addiert, erhält die Behauptung des Hilfssatzes die Gestalt

$$2^{-s}\Gamma(s)e^{i\frac{\pi s}{2}}=\int_0^\infty x^{s-1}(e^{2ix}-1)\,dx,\quad \text{für}\quad -1<\sigma<0\,^{10}). \tag{13}$$

Nunmehr bezeichne $\mathfrak{L}$ einen Integrationsweg, der sich geradlinig längs der Achse der positiven reellen Zahlen bis zu einem Punkte mit der Entfernung R vom Nullpunkte erstreckt, hierauf längs eines Viertelkreises um den Nullpunkt mit dem Radius R bis zur Achse der positiv imaginären Zahlen verläuft und endlich längs dieser Achse wieder zum Nullpunkte zurückkehrt. Dann ist nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$\int_{\mathfrak{L}} x^{s-1}(e^{2ix}-1)\,dx=0.$$

Geht man zur Grenze $R=\infty$ über, so verschwindet offenbar wegen $-1<\sigma<0$ das Integral längs des Viertelkreises und man erhält

$$\int_0^\infty x^{s-1}(e^{2ix}-1)\,dx-\int_0^{+i\infty} x^{s-1}(e^{2iz}-1)\,dx=0,$$

[10]) Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig (1906). S. 152–153. Dort befinden sich auch bezüglich einer (13) sehr ähnlichen Formel nähere Literaturangaben.

hin

$$\int_0^\infty x^{s-1}(e^{2ix}-1)\,dx = i\cdot i^{s-1}\int_0^\infty x^{s-1}(e^{-2x}-1)\,dx$$

$$= e^{i\frac{\pi s}{2}}\,2^{-s}\int_0^\infty u^{s-1}(e^{-u}-1)\,du$$

$$= e^{i\frac{\pi s}{2}}\,2^{-s}\,\Gamma(s)^{11});$$

n indem man die beiden Teile $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$ des Integrals

$$\int_0^\infty u^{s-1}(e^{-u}-1)\,du$$

en für sich besonders betrachtet, überzeugt man sich leicht, daß dieses egral die analytische Fortsetzung im Streifen $-1<\sigma<0$ des für >0 konvergenten Eulerschen Integrals

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\,du$$

Hiermit ist die Beziehung (13) bewiesen und die Behauptungen (9) (10) folgen unmittelbar, indem man in (13) den reellen vom imaären Bestandteil trennt und auf die Formel (11) und (12) zurückgeht, z. b. w.

§ 2.

Integraldarstellung des Produktes aus einer Dirichletschen Reihe und einem Quotienten von Γ-Funktionen.

Satz 2. *Es sei*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

e Dirichletsche Reihe, die für $\sigma>1$ absolut konvergiert.

Setzt man

$$G(s+2)=f(s+2)\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

$$\varphi(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(\cos 2\pi nx-1),$$

---

[11]) A. Cauchy, Sur les diverses propriétés de la fonctions $\Gamma(x)$. Exercices athématiques, seconde année, Paris 1827, S. 91–92. Wieder abgedruckt: Werke, Reihe 8, S. 121–123. Vgl. auch l. c. Anm. [10]), S. 146–147.

so ist für $-1<\sigma<0$

$$G(s+2)=\int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)\,dx. \tag{16}$$

Beweis. Es ist nach Formel (9) für $-1<\sigma<0$, wie eine einfache Substitution zeigt,

$$\frac{\sqrt{\pi}\ \ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{(\pi n)^s\ \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=2\int_0^\infty x^{s-1}(\cos 2\pi n x-1)\,dx.$$

Hieraus ergibt sich, indem man beide Seiten der Identität mit $\frac{a_n}{n^2}$ multiplizier, nach n summiert und die Formeln (1) und (14) berücksichtigt,

$$G(s+2)=2\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^2}\int_0^\infty x^{s-1}(\cos 2\pi n x-1)\,dx.$$

Da aber für $-1<\sigma<0$ die Reihe

$$2\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{a_n}{n^2}\right|\int_0^\infty|x^{s-1}|\,|(\cos 2\pi n x-1)|\,dx=-\pi^{\frac{1}{2}-\sigma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)}\sum_{n=1}^\infty\frac{|a_n|}{n^{2+\sigma}}$$

konvergent ist, so läßt sich die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen und es ergibt sich die behauptete Beziehung (16), w. z. b. w.

Wir nehmen noch mit den Formeln (14) und (16) eine kleine Umformung vor, indem wir s für $s+2$ substituieren, dann erhält man das für $1<\sigma<2$ absolut konvergente Integral

$$G(s)=f(s)\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\,\pi^{\frac{3}{2}-s}=\frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}\,f(s)\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\pi^{\frac{1}{2}-s}=\int_0^\infty x^{s-3}\varphi(x) \tag{17}$$

Die bekannte Relation

$$\lim_{t=\infty}\frac{|\Gamma(\sigma+it)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}\ ^{12}),$$

die gleichmäßig in jedem Streifen von endlicher Breite $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ gilt, ergibt wegen (11) gleichmäßig für $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$, $|t|\geqq T$

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\right|\leqq C\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

---

[12]) T. J. Stieltjes, Sur le développement de log $\Gamma(a)$, Journ. de Math. pures et appl. sér. IV, 5 (1889), S. 425–445. Vgl. auch Lipschitz, Über die Darstellung gewisser Funktionen durch die Eulersche Summenformel, Journ. für die r. und angew. Math., **56** (1859), S. 11–26, siehe insbes. S. 20.

nin, da $f(s)$ für $\sigma \geqq 1+\delta$ wegen der absoluten Konvergenz der Reihe unterhalb einer festen von s unabhängigen Schranke bleibt, gilt für) gleichmäßig im Bereich $1+\delta \leqq \sigma \leqq 2-\delta$, $|t| \geqq T$

$$|G(s)| \leqq C'|t|^{\sigma-\frac{5}{2}},$$

bei mit C und C' passend gewählte Konstante bezeichnet sind.

Die Abschätzung (18′) zeigt, daß $G(s)$ im Streifen $1+\delta \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2}-\delta$ Voraussetzung des Hilfssatzes 1 erfüllt. Aus ihm ergibt sich, da nach ssatz 2 $G(s)$ sich nur auf eine Weise durch ein Integral der Gestalt) darstellen läßt, für die Funktion $\varphi(x)$ der Formel (15) die Integral-stellung

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} x^{2-s} G(s)\, ds.$$

§ 3.

wendige Bedingungen für die Riemannsche Funktionalgleichung.

Die Darstellung (17) der Funktion $G(s)$ in Verbindung mit (15) rt zum Beweise des in der Einleitung angegebenen Satzes I, der nun-ar unter den Voraussetzungen **a)**, **b)**, **c)** und **d′)** bewiesen werden soll.

Beweis. In der Funktionalgleichung (II) bezeichnet $g(1-s)$ das dukt

$$g(1-s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s)\, \pi^{-s+\frac{1}{2}}.$$

Benutzt man die Formel (17) des vorigen Paragraphen, so ergibt für $g(1-s)$ die für $1 < \sigma < 2$ absolut konvergente Integraldarstellung

$$g(1-s) = -\frac{(s-2)(s-1)}{4\pi^2} G(s) = -\frac{(s-2)(s-1)}{4\pi^2} \int_0^\infty x^{s-3} \varphi(x)\, dx,$$

bei $\varphi(x)$ sowohl gleich der absolut konvergenten Kosinusreihe (15) als n gleich dem Integral (19) ist. $\varphi(x)$ hat also die beiden Eigenschaften

$$\varphi(x+1) = \varphi(x), \qquad \varphi(1-x) = \varphi(x).$$

Nunmehr suchen wir für $g(1-s)$ aus (20) eine ähnliche, im Bereiche $-\alpha$ konvergente Integraldarstellung abzuleiten, unter α die gleiche l wie in Voraussetzung **d′)** verstanden, und beginnen mit der Bemer-g, daß auf den Rändern der beiden Halbstreifen

$$-\beta \leqq \sigma \leqq \tfrac{5}{4}, \qquad |t| \geqq T \qquad (\beta > \alpha),$$

bei passender Wahl von T und C''

$$(23) \qquad \left| -\frac{(s-2)^{\frac{1}{4}}(s-1)}{4\pi^2} G(s) \right| = |(s-2)^{-\frac{3}{4}} g(1-s)| \leqq C''$$

bleibt, da $g(1-s)$ auf der Geraden $\sigma = -\beta$ beschränkt ist und $G(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{5}{4}$ der Abschätzung (18′) genügt.

Wählt man noch $T \geqq r$, unter r die Konstante der Voraussetzung b) verstanden, so ist $f(s)$ und damit auch $g(1-s)$ in dem Bereich (22) im Endlichen regulär. Außerdem ist im Innern und auf dem Rande von (22) wegen b)

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^\gamma},$$

mithin wegen (18) bei passender Wahl der Konstanten γ'

$$|(s-2)^{-\frac{3}{4}} g(1-s)| \leqq e^{|s|^{\gamma'}}.$$

Es läßt sich daher nach einem bekannten funktionentheoretischen Hilfssatz von Phragmén-Lindelöf[13]) schließen, daß die Abschätzung (23), die zunächst nur für den Rand des Bereiches (22) nachgewiesen wurde, auch für das Innere dieses Bereiches gilt.

Es ergibt sich somit, wenn man (23) mit $(s-2)^{-\frac{1}{4}}(s-1)^{-1}$ multipliziert, für den ganzen Bereich $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$, $|t| \geqq T$

$$(24) \qquad \frac{1}{4\pi^2}|G(s)| = \left| \frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)} \right| \leqq C''(s-2)^{-\frac{1}{4}}(s-1)^{-1}.$$

Die Beziehung (24) zeigt aber, daß die Funktion $\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}$ mindestens in dem Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq -\alpha - \delta$ alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Man erhält mithin

$$(25) \qquad \frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)} = \int_0^\infty x^{s-3} \psi(x)\, dx,$$

$$(26) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} x^{-s+2} \frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)} ds = \frac{-1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} x^{-s+2} G(s)\, ds$$

wobei σ_1 dem Intervall $-\beta < \sigma_1 < -\alpha - \delta$ angehört.

Es bezeichne $R(x)$ die Residuensumme der Funktion $\frac{1}{4\pi^2} x^{-s+2} G(s)$ im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$.

Wendet man auf das Integral (26) den Cauchyschen Integralsatz an, indem man die Berandung des Streifens $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$ zum Integrationsweg wählt, so erhält man mit Rücksicht auf (24)

---

[13]) E. Phragmén und E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Math. **31** (1908), S. 381—406, insbes. S. 385.

$$\psi(x) = R(x) - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} x^{-s+2}\,G(s)\,ds = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$$

gen (19). Da nach Voraussetzung a) die Funktion $f(s)$ und damit h $G(s)$ im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$ keine wesentlichen Singularitäten, son- n höchstens endlich viele Pole besitzt, so ist $R(x)$ eine Funktion Gestalt

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-s_\nu+2}\,(A_{q_\nu-1}^{(\nu)}\log^{q_\nu-1}x + \ldots + A_1^{(\nu)}\log x + A_0^{(\nu)}),$$

nn $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots, s_m$ die Pole von $G(s)$ in dem Streifen und $q_2, \ldots, q_\nu, \ldots, q_m$ ihre Ordnung bezeichnet. $R(x)$ ist also offenbar e für positive Werte von x reguläre analytische Funktion [14]).

Nunmehr suchen wir die Voraussetzung nutzbar zu machen, daß für $< -\alpha$ die Funktion $g(1-s)$ gleich der dort absolut konvergenten richletschen Reihe (2) ist, indem wir aus (2) gleichfalls eine Integral- rstellung der Gestalt (25) für $\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}$ abzuleiten suchen.

Es bezeichne $B(x)$ eine sogenannte Treppenfunktion, die durch die ziehungen

$$\begin{aligned} B(x) &= 0 && \text{für } 0 \leqq x < 1,\\ B(x) &= b_1 && \text{für } 1 \leqq x < 2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B(x) &= b_1 + b_2 + \ldots + b_m && \text{für } m \leqq x < m+1 \end{aligned}$$

iniert ist. Dann ist nach einer elementaren Abschätzung aus der Theorie Dirichletschen Reihen, da nach Voraussetzung die Reihe (2) min- tens für $\sigma < -\alpha$, das heißt für $1-\sigma > \alpha+1$ konvergiert, für jedes h so kleine positive δ

$$|B(x)| \leqq C x^{\alpha+1+\delta}\ ^{15}),$$

er C eine passend gewählte positive Konstante verstanden, die nur δ aber nicht mehr von x abhängt.

Nunmehr ergibt sich nach einer einfachen Umformung der Reihe (2) ch sogenannte partielle oder Abelsche Summation das wegen (28)

---

[14]) Im folgenden wird von den Eigenschaften der Funktion $R(x)$ nur benutzt, für positive Werte von x der Differentialquotient $\frac{dR(x)}{dx}$ existiert und stetig ist.

[15]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primlen, Leipzig 1909, 2 Bde. 1, S. 121–122.

mindestens für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integral

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n)\left(\frac{1}{n^{1-s}} - \frac{1}{(n+1)^{1-s}}\right) = -(s-1)\int_0^{\infty} B(x)\,x^{s-2}\,dx.$$

Setzt man

$$B_1(x) = \int_0^x B(u)\,du,$$

d. h.

$$= 0 \qquad \text{für } 0 \leqq x < 1,$$

$$(29) \qquad = \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x-\nu) \qquad \text{für } m \leqq x < m+1,$$

so erhält man nach nochmaliger partieller Integration für $\sigma < -\alpha$ wegen (28)

$$(30) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^{\infty} x^{s-3} B_1(x)\,dx \text{ [16]}.$$

Vergleicht man diese Integraldarstellung für $g(1-s)$ mit (25), so ergibt sich aus Hilfssatz 2 in Verbindung mit (27)

$$B_1(x) = \psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}.$$

Aus (21) folgt ferner für $x \geqq 1$

$$B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x),$$

mithin wegen (29)

$$(31) \quad R(x+1) - R(x) = b_{m+1}(x-m) + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu \qquad \text{für } m \leqq x < m+1.$$

Die Kurve, die durch die Summe rechter Hand als Funktion von x dargestellt wird, ist im allgemeinen ein gebrochener, geradliniger Polygonzug, dessen Ecken in den Punkten mit ganzzahliger Abszisse liegen. Andererseits ist $R(x+1) - R(x)$ eine für positives x reguläre analytische Funktion, besitzt mithin einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung. Damit aber der Differentialquotient der Summe rechter Hand von (31) stetig ist, muß diese eine gewöhnliche Linearfunktion sein, also

$$R(x+1) - R(x) = ax + b,$$

---

[16]) Diese Bildung findet sich auch in mehreren Arbeiten von Herrn Landau. Vgl. z. B. Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Form (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Sitzungsber. der Kgl. Preuß. Akad. der Wissenschaften, 31 (1915), S. 458–476, siehe insbes. S. 470; ferner: Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, 2. Abhandl., Nachr. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-phys. Kl. 1915, S. 209–243, siehe insbes. S. 220. Überhaupt hat unser Ansatz mit dem der zitierten Landauschen Arbeit eine gewisse Verwandtschaft.

hin in Verbindung mit (31)

$$b_{m+1} = a \qquad \text{für alle } m = 0, 1, 2, \ldots$$

Aus der Beziehung (32) folgt aber bereits, daß

$$g(1-s) = a\zeta(1-s)$$

und substituiert man dies zur Bestimmung von $f(s)$ in die Gleichung (II) Voraussetzung **d′**), so ergibt sich mit Rücksicht auf die Riemannsche ıktionalgleichung (I) der ζ-Funktion

$$f(s) = a\zeta(1-s)\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{s-\frac{1}{2}} = a\zeta(s).$$

nit ist Satz 1 bewiesen.

§ 4.

ıer Beweis, daß die ζ-Funktion der Riemannschen Funktionalgleichung genügt.

Es soll hier der Ansatz der §§ 2 und 3 benutzt werden, um die ıktionalgleichung der ζ-Funktion von neuem abzuleiten.

Zunächst folgt aus Formel (17) in Verbindung mit (15)

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)}\zeta(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty x^{s-3}\varphi(x)\,dx,$$

ei

$$\frac{1}{4\pi^2}\varphi(x) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos 2\pi n x - 1)$$

tzt ist. Nun ist aber diese trigonometrische Reihe die Fourierentklung von $\frac{x^2-x}{2}$ im Intervall $0 \leqq x < 1$, d. h.

$$\frac{\varphi(x)}{4\pi^2} = \frac{(x-m)^2-(x-m)}{2} \qquad \text{für } m \leqq x < m+1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

nbar konvergiert die Integraldarstellung (33) für $1 < \sigma < 2$ absolut. Andrerseits ist das Integral

$$J(s) = \int_0^\infty x^{s-3}\left(\frac{x^2-x}{2} - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}\right)dx$$

$\sigma < 0$ absolut konvergent, da

$$\frac{x^2-x}{2} - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2} = 0 \qquad \text{für } 0 \leqq x < 1$$

Es ergibt sich ferner für $\sigma < 0$

$$J(s) = \int_1^\infty + \int_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) - \int_1^\infty x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx + \int_0^1 x^{s-3}\left(\frac{x^2-x}{2} - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}\right)dx$$

und in dieser Gestalt konvergiert das Integral rechter Hand sogar für $\sigma < 2$ absolut; insbesondere erhält man für $1 < \sigma < 2$

$$J(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) - \int_1^\infty x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right) - \int_0^1 x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx$$

$$= -\int_0^\infty x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx.$$

Das Integral (35) ist mithin die analytische Fortsetzung des Integrals (33) in der Halbebene $\sigma < 0$, so daß dort

$$(36) \qquad (s-2)(s-1)J(s) = \zeta(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}}.$$

Aus (34) ergibt sich nun aber

$$(37) \qquad \frac{x^2-x}{2} - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2} = mx - \frac{m(m+1)}{2} = \sum_{\nu=1}^{m}(x-\nu) \quad \text{für } m \leqq x < m+1$$

Andrerseits ist endlich nach Formel (30) in Verbindung mit (29) des § 3

$$\zeta(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}B_1(x)dx,$$

$$B_1(x) = \sum_{\nu=1}^{m}(x-\nu) \qquad \text{für } m \leqq x < m+1;$$

mithin wegen (37)

$$B_1(x) = \frac{x^2-x}{2} - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$$

und wegen (35)

$$\zeta(1-s) = (s-2)(s-1)J(s).$$

Setzt man diesen Wert für $(s-2)(s-1)J(s)$ in (36) ein, so erkennt man, daß die Funktion $\zeta(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügt; w. z. b. w.

(Eingegangen 19. August 1920.)

¹une osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate.

Di

Pietro Tortorici in Palermo.

Fin dal 1906 il Bianchi ha dimostrato che la costruzione delle con-nze rettilinee W aderenti a due superficie rigate una delle quali sia , dipende dalle deformazioni infinitesime a generatrici rigide di questa e inoltre la corrispondente funzione caratteristica di Weingarten iene gli elementi di una funzione arbitraria di una variabile[1]).

Fin da allora il Bianchi pose il problema di decidere se possa di-si di tale funzione arbitraria in guisa che la seconda falda focale della ruenza risulti applicabile sulla prima ed io, da alcune mie ricerche enti a risolvere in modo generale il problema, sono stato condotto a ie considerazioni le quali, se non erro, danno nuovi particolari ana- sulla teoria delle congruenze in discorso.

Io qui ne espongo alcune che possono presentarsi con metodo ana- semplice ed uniforme e che conducono a conseguenze interessanti. Così p. es. è noto che la funzione caratteristica di cui sopra, sup- note le asintotiche sulla rigata data, ottienesi in ogni caso con tre rature[2]); io dimostro che, nelle medesime ipotesi, essa può assegnarsi citamente a priori e dò effettivamente la forma di tale funzione in caso.

Io mi limito qui ad esporre soltanto considerazioni di indole generale ppongo che le generatrici rettilinee si corrispondano sulle due falde, do questo, dietro un teorema di Segre[3]), il caso più generale.

---

[1]) Cfr. L. Bianchi, Sur la deformation des quadriques, Comptes Rendus, 2,), pp. 633–635.

[2]) Cfr. L. Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, 2, p. 26; M. Picone, congruenze rettilinee W, Rendiconti dal Circolo Matematico di Palermo, 37), pp. 212–244.

[3]) Cfr. C. Segre, Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde sono rigate, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, 49 (1914), pp. 291–303.

Il lettore osserverà che con facilità potrebbero costruirsi gli elemen analitici relativi alla seconda falda focale e che nella loro espression comparisce la funzione arbitraria in precedenza assegnata; ma varie appl cazioni esporrò in seguito; qui aggiungerò solo che taluni fatti geometri relativi alle superficie rigate restano del tutto chiariti: così per es. faci mente troverebbesi a quali circostanze analitiche è dovuto il fatto ch per le superficie rigate, i due fasci di superficie che ottengonsi col te rema generale di permutabilità, possono essere costituiti da una unic totalità semplicemente infinita di rigate.

§ 1.

Un teorema ausiliare con applicazioni. Classificazione delle congruenze B Richiami sulle trasformazioni di Moutard.

1. Parlando di una superficie rigata, a meno che non si avverta contrario, intenderemo che le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ siano le sue asi totiche e che le generatrici rettilinee siano le linee $u = \text{cost.}$ Limiterem le nostre considerazioni a variabili reali; per quanto, se le variabili fosser immaginarie, la trattazione analitica non sarebbe essenzialmente diversa.

Resta inteso inoltre che le eventuali deformazioni che considereremo per una superficie rigata avvengano a generatrici rigide. A fondament della nostra ricerca poniamo il seguente teorema: *L'equazione di Laplac ad invarianti uguali associata alle asintotiche di una superficie rigat ha necessariamente una delle forme:*

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 2 \frac{\varphi'(u)\, \psi'(v)}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2} \theta.$$

Riportiamo la dimostrazione di questo teorema dovuto a Goursat[4]. Manteniamo completamente le notazioni del Bianchi, ed inoltre, con siderando funzioni di una sola variabile, indicheremo con apici le lor derivate. Sia:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta, \qquad M(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \sqrt{\varrho} - f,$$

l'equazione di Moutard associata alle asintotiche di una superficie qu

[4]) Cfr. Goursat, Bulletin de la société mathematique de France, 1896, p. 4 vedi anche: G. Tzitzeica, Sur certaines courbes gauches, Annales de l'École Norma Superieure, 28 III. Série (1911), pp. 1–32.

que: se la superficie è rigata detto $P \equiv (x, y, z)$ il punto corrente su , deve aversi:

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Può inoltre porsi:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = A \frac{\partial \xi}{\partial u} + B \frac{\partial \xi}{\partial v} + C$$

le analoghe circolando, A, B, C, essendo opportune funzioni di u, v ió perchè è certo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}, & \frac{\partial \xi}{\partial v}, & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}, & \frac{\partial \eta}{\partial v}, & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u}, & \frac{\partial \zeta}{\partial v}, & \zeta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le note formule di Lelieuvre forniscono poi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} - \zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}$$

analoghe, onde sostituendo ottienesi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = A \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) + B \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)$$

uindi, per le formule di Lelieuvre medesime:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v},$$

le analoghe per y, z.

Confrontando le (4) con le (1) deducesi intanto:

$$A = 0$$

e le funzioni ξ, η, ζ devono essere integrali comuni alle due equazioni:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = B \frac{\partial \theta}{\partial v} + C\theta.$$

Tali equazioni costituiscono un sistema differenziale le condizioni di grabilità del quale, eseguita ogni riduzione, scrivonsi:

$$M \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} \theta = BM\theta + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} \theta + C \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Poichè a tale relazione certamente sodisfano ξ, η, ζ, a causa di (3), ucesi subito:

$$C = 0$$

uindi se $M \neq 0$ successivamente:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial v} = B, \qquad M = \frac{\partial B}{\partial u}; \qquad \frac{\partial^2 \log M}{\partial u \, \partial v} = M$$

mentre che, se $M = 0$ ottiensi soltanto:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

2. Esaminiamo i due casi possibili cominciando dal secondo. Poichè

$$B = \lambda(v),$$

a causa di (5), ξ, η, ζ sodisfano alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \lambda(v) \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

ed allora, tenuto presente che esse sono anche soluzioni di (a), dimostras che esse sodisfano ad una equazione del tipo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = k \psi_1(v) \qquad (k \text{ costante}$$

e quindi sono necessariamente della forma:

$$\theta(u, v) = k \psi(v) + \varphi(u)$$

essendo ψ_1 e ψ certe funzioni di v, k una costante arbitraria, φ una funzione arbitraria di u.

Risulta allora il teorema:

La più generale superficie rigata avente per equazione associata alle asintotiche la

(a) $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0$$

si ottiene ponendo nelle formule di Lelieuvre:

$$\xi = \varphi_1(u) + k_1 \psi(v),$$
$$\eta = \varphi_2(u) + k_2 \psi(v),$$
$$\zeta = \varphi_3(u) + k_3 \psi(v),$$

ove $\psi(v)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$ sono quattro funzioni arbitrarie e k_1, k_2, k_3 tre costanti arbitrarie.

3. Nell'altro caso possibile $M \neq 0$ devesi integrare l'equazione:

(8) $$\frac{\partial^2 \log M}{\partial u \, \partial v} = M.$$

Posto:

$$M = e^{\lambda(u, v)}$$

la (8) scrivesi:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v} = e^{\lambda}$$

che è l'equazione di Liouville per le superficie minime. Concludesi pertanto che è:

$$M(u,v) = \frac{2\varphi'(u)\psi'(v)}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}$$

endo φ e ψ due funzioni arbitrarie.

Ora è noto[5]) che l'integrale generale della equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\varphi'(u)\psi'(v)}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}\theta$$

dato da:

$$\theta(u,v) = \frac{F_1'(u)}{\varphi'(u)} + \frac{F_2'(v)}{\psi'(v)} - 2\frac{F_1(u)+F_2(v)}{\varphi(u)+\psi(v)}$$

$F_1(u)$ ed $F_2(v)$ funzioni arbitrarie. Vediamo allora come debbano ndersi tre soluzioni linearmente indipendenti di (b) affinchè, mediante formule di Lelieuvre, esse definiscano una superficie rigata.

Per semplicità prendiamo come variabili indipendenti le φ, ψ mede- ne, cambiamo cioè i parametri delle asintotiche. La (b) scrivesi:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\theta}{(u+v)^2}; \qquad M = \frac{2}{(u+v)^2}.$$

Per le (7) allora si ha:

$$B = -\frac{2}{u+v}$$

perciò, a causa di (5), ξ, η, ζ devono essere integrali della equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\frac{2}{u+v}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Questa dà:

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}f(u)$$

$f(u)$ funzione arbitraria. Derivando rispetto a v si ottiene;

$$\frac{2}{(u+v)^2}\theta = \frac{2}{(u+v)^2}f'(u) - \frac{4}{(u+v)^3}f(u)$$

de risulta:

$$\theta(u,v) = f'(u) - \frac{2f(u)}{u+v}.$$

Concludesi quindi:

La più generale superficie rigata avente per equazione associata e asintotiche la

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\theta}{(u+v)^2},$$

ottiene ponendo nelle formule di Lelieuvre:

$$\xi = f_1'(u) - \frac{2f_1(u)}{u+v}, \qquad \eta = f_2'(u) - \frac{2f_2(u)}{u+v}, \qquad \zeta = f_3'(u) - \frac{2f_3(u)}{u+v},$$

f_1, f_2, f_3 *funzioni arbitrarie di* u.

[5]) Cfr. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2e. 2e edit. 389.

Le formule di Lelieuvre dànno allora:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (f_3' f_2'' - f_2' f_3'') - (f_3 f_2'' - f_2 f_3'')\frac{2}{u+v} + (f_3 f_2' - f_2 f_3')\frac{2}{(u+v)^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -(f_2 f_3' - f_3 f_2')\frac{2}{(u+v)^2},$$

con le analoghe, e da queste risultano le formule di Goursat:

$$x = (f_2 f_3' - f_3 f_2')\frac{2}{u+v} - \int (f_2' f_3'' - f_3' f_2'')\,du \tag{10}$$

e analoghe circolando.

Se non si fossero cambiati i parametri delle asintotiche il risultato sarebbe stato il seguente:

La più generale superficie rigata la quale abbia per equazione associata alle asintotiche la (b) *si ottiene ponendo nelle formule di Lelieuvre:*

$$\xi = \frac{f_1'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2 f_1(u)}{\varphi(u)+\psi(v)}, \quad \eta = \frac{f_2'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2 f_2(u)}{\varphi(u)+\psi(v)}, \quad \zeta = \frac{f_3'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2 f_3(u)}{\varphi(u)+\psi(v)}$$

con f_1, f_2, f_3 *funzioni arbitrarie.*

4. Prima di proseguire facciamo una applicazione di cui ci serviremo nel seguito, decidiamo cioè come debbansi scegliere le funzioni ξ, η, ζ per ottenere, mediante le formule di Lelieuvre, una quadrica (reale).

Nel caso $M = 0$, poichè anche le linee $v =$ cost. sono rettilinee, le ξ, η, ζ, oltre a sodisfare alla relazione trovata (cfr. No. 2):

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = k\psi_1(v)$$

devono sodisfare alla relazione analoga:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = c\varphi_1(u)$$

onde risulta:

$$\theta(u, v) = c\varphi(u) + k\psi(v) + C.$$

Le ξ, η, ζ devono dunque essere di tale forma e perciò, assumendo a variabili indipendenti le φ e ψ medesime che torniamo a chiamare u, v, per avere una quadrica, nel caso $M = 0$, bisognerà e basterà che sia:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 u + k_1 v + h_1, \\ \eta &= c_2 u + k_2 v + h_2, \\ \zeta &= c_3 u + k_3 v + h_3. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(c_i, k_i, h_i \text{ costanti}), \\ &(i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

Le formule di Lelieuvre forniscono allora:

$$\begin{aligned} x &= A_1 uv + B_1 u + C_1 v + D_1, \\ y &= A_2 uv + B_2 u + C_2 v + D_2, \\ z &= A_3 uv + B_3 u + C_3 v + D_3, \end{aligned}$$

A_i, B_i, C_i sono costanti dipendenti da c_i, k_i, h_i e le D_i sono costanti trarie.

Ad esempio, se indicando con p e q due costanti, ponesi:

$$c_1 = k_1 = \frac{q}{p}, \qquad c_1 = -k_2 = -\frac{p}{q}, \qquad c_3 = k_3 = 0,$$

$$h_1 = 0, \qquad h_2 = 0, \qquad h_3 = -pq,$$

enesi:

$$x = p^2(u+v) + D_1,$$
$$y = q^2(u-v) + D_2,$$
$$z = \quad 2uv \quad + D_3.$$

Mutando l'origine può ritenersi:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

ottienesi in tal modo il paraboloide iperbolico di parametri p^4 e q^4:

$$\frac{x^2}{p^4} - \frac{y^2}{q^4} = 2z.$$

Nell'altro caso $M \neq 0$ supponiamo, senza restrizione, che sia

$$M = \frac{2}{(u+v)^2}.$$

Poichè le linee $v =$ cost. sono pure rettilinee, indicando con θ una qua-que delle funzioni ξ, η, ζ e con $f_1(u), f_2(v)$ due funzioni opportune, e essere possibile avere una relazione della forma:

$$\theta(u,v) = f_1'(u) - \frac{2f_1(u)}{u+v} = f_2'(v) - \frac{2f_2(v)}{u+v}.$$

Ora se si dà a v un valore determinato, la precedente mostra che $f_1(u)$ inzione quadratica di u; parimenti sarà $f_2(v)$ funzione quadratica di v, e posto:

$$f_1(u) = au^2 + bu + c,$$
$$f_2(v) = \alpha v^2 + \beta v + \gamma$$

a, b, c; α, β, γ costanti, trattasi di determinare tali costanti in modo la (11) risulti sodisfatta. Sostituendo vedesi che bisogna e basta sia:

$$a = \alpha, \qquad b = -\beta, \qquad c = \gamma$$

iindi:

$$\theta(u,v) = \frac{2auv - b(u-v) - 2c}{u+v}.$$

Per definire dunque la più generale quadrica in questo caso, bisognerà e nelle (9):

$$)= a_1u^2 + b_1u + c_1,\ f_2(u) = a_2u^2 + b_2u + c_2,\ f_3(u) = a_3u^2 + b_3u + c_3$$

con a_i, b_i, c_i costanti e le formule (10) di Goursat, eseguita ogni integrazione, dànno:

$$x = \frac{1}{u+v}\left[-2(a_3b_2 - a_2b_3)uv + 4u(c_2a_3 - c_3a_2) + 2(b_3c_2 - b_2c_3) + C_1(u+\right.$$

ed analoghe circolando, con C_1, C_2, C_3 costanti arbitrarie.

Ad esempio, se indicando con a, b, c tre costanti ponesi:

$$a_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{a}}, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{a}},$$

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = \sqrt{\frac{ac}{b}}, \qquad c_2 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{c}}, \qquad b_3 = 0, \qquad c_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{c}},$$

ottienesi:

$$\xi = -\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \frac{1+uv}{u+v}, \qquad \eta = -\sqrt{\frac{ac}{b}} \cdot \frac{u-v}{u+v}, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \frac{1-uv}{u+v}$$

e:

$$x = a\frac{1+uv}{u+v} + C_1, \qquad y = b\frac{u-v}{u+v} + C_2, \qquad z = c\frac{1-uv}{u+v} + C_3.$$

Cambiando l'origine può ritenersi:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

ed ottienesi così l'iperboloide ad una falda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5. Indicheremo semplicemente con R_a una rigata che ammetta la (a) come equazione associata alle asintotiche, con R_b una rigata che ammetta come equazione associata la (b).

Se si ha una congruenza W qualsiasi è noto che le equazioni di Moutard associate alle asintotiche delle sue falde focali sono vincolate una all'altra appunto per una trasformazione di Moutard. Lo stesso dovendo accadere per una congruenza W le falde focali della quale siano due superficie rigate R, $\bar{R}$, si potranno al più distinguere tre specie di tali congruenze, secondo che le equazioni associate alle asintotiche delle sue falde focali sono entrambi del tipo (a), ovvero una del tipo (a) e l'altra del tipo (b) od entrambi del tipo (b).

Nell'ipotesi che tali congruenze esistano, le distingueremo ordinatamente con i nomi W_a, W_{ab}, W_b.

Intanto è evidente che condizioni necessarie di esistenza per le tre classi di congruenze menzionate sono ordinatamente:

1°) che l'equazione (a) possa trasformarsi in sè medesima alla maniera di Moutard.

2°) che l'equazione (a) ammetta trasformate di Moutard del tipo (b).

3°) che l'equazione (b) possa trasformarsi, alla maniera di Moutard, in sè medesima o in altra equazione del medesimo tipo.

Per decidere se tali condizioni possano essere sodisfatte e per studiare ipletamente le tre classi di congruenze, ci serviremo delle semplici siderazioni seguenti.

6. Essendo in generale:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M_1\theta, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M_2\theta$$

equazioni di Laplace ad invarianti uguali, perchè l'una possa tra-marsi nell'altra alla maniera di Moutard, è necessario e sufficiente esista un integrale comune alle due equazioni[6]):

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M_1,$$

$$\frac{\partial \log\theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \log\theta}{\partial v} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

llora è appunto $\theta(u, v)$ la soluzione particolare della prima equazione liante la quale essa trasformasi nella seconda. Se ponesi:

$$\theta(u, v) = e^{\lambda(u, v)}$$

recedente sistema differenziale è equivalente all'altro:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}(M_1 - M_2),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

teoria generale ne accerta che, sodisfatte le condizioni di integrabilità, unzione λ conterrà al più due costanti arbitrarie[7]).

7. Applichiamo la considerazione precedente alla ricerca di tutte le azioni ad invarianti uguali le quali possano restare in loro medesime trasformazione di Moutard.

Posto:

$$M_1 = M_2 = M,$$

sistema differenziale (13) traggonsi per la funzione $\lambda(u, v)$ le con-oni:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial v} = M(u, v).$$

---

[6]) Cfr. G. Darboux, loc. cit. [5]) Chapitre VII, Les équations a invariants égaux.
[7]) Cfr. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux derivées par-s du second ordre, 2, n° 120.

Ora l'integrale generale della prima di tali equazioni essendo

$$\lambda(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

si ha:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{d\alpha}{du}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{d\beta}{dv}$$

cioè:

$$M = \frac{d\alpha}{du} \cdot \frac{d\beta}{dv}.$$

La funzione M deve essere dunque il prodotto di una funzione della sola u per una della sola v.

Inversamente se è:

$$M = \varphi(u)\psi(v),$$

la funzione:

$$\lambda = \int \varphi(u)du + \int \psi(v)dv$$

è soluzione di:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = 0$$

e la funzione

$$\theta(u, v) = e^{\int \varphi du + \int \psi dv}$$

trasforma effettivamente in sè stessa l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta = \varphi(u)\psi(v)\theta(u, v).$$

Risulta quindi il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la equazione;

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta$$

possa trasformarsi in sè medesima è che sia M il prodotto di due funzioni una della sola u l'altra della sola v[8]).

§ 2.

Le congruenze W_a.

8. Una congruenza W_a ha come falde focali due rigate R_a: bisogna allora esaminare se l'equazione:

---

[8]) È noto che se:

$$M = f_1'(u) f_2'(v),$$

l'equazione $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta$ può, mediante un cambiamento di parametri, mutarsi nella $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta$ la quale integrasi per funzioni Besseliane di prima specie. Si può dimostrare che il fatto che la equazione sia trasformabile in sè stessa alla maniera di **Moutard** porta che, senza ricorrere alla funzioni di **Bessel**, si può avere un integrale di essa contenente quante si vogliano costanti arbitrarie e privo di segni di quadratura.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$$

sa trasformarsi in sè medesima.

Il teorema stabilito al numero che precede ne accerta che ciò avviene ıpre e soltanto allora che si assuma a funzione trasformatrice R una zione arbitraria di una sola variabile; eventualmente una costante.

9. Assunta allora la funzione:

$$R = \chi(u)$$

ıtegrale generale di (a):

$$\theta(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

sformasi nello integrale $\bar{\theta}(u, v)$ definito dalle relazioni:

$$\frac{\partial(\chi\bar{\theta})}{\partial u} = -\varphi'\chi + (\varphi + \psi)\chi'$$

$$\frac{\partial(\chi\bar{\theta})}{\partial v} = \psi'\chi$$

le risulta:

$$\bar{\theta}(u, v) = \psi - \varphi + \frac{2}{\chi}\int \chi'\varphi\, du = \theta - \frac{2}{\chi}\int \chi\varphi'\, du$$

i vede che la trasformazione altera la funzione θ per una funzione litiva della sola u, eventualmente per una costante additiva arbitraria.

10. Prendiamo ora la più generale rigata R_a definita, secondo quanto cede, ponendo:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(u) + k_1\psi(v), \\ \eta &= \varphi_2(u) + k_2\psi(v), \\ \zeta &= \varphi_3(u) + k_3\psi(v). \end{aligned}$$

Operando la trasformazione precedente, le espressioni delle funzioni sformate di ξ, η, ζ sono ordinatamente:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi - \frac{2}{\chi(u)}\int \chi(u)\varphi_1'(u)\, du = \Phi_1(u) + k_1\psi(v), \\ \bar{\eta} &= \eta - \frac{2}{\chi(u)}\int \chi(u)\varphi_2'(u)\, du = \Phi_2(u) + k_2\psi(v), \\ \bar{\zeta} &= \zeta - \frac{2}{\chi(u)}\int \chi(u)\varphi_3'(u)\, du = \Phi_3(u) + k_3\psi(v), \end{aligned}$$

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(u) - \frac{2}{\chi(u)}\int \chi(u)\varphi_i'(u)\, du \qquad (i = 1, 2, 3)$$

secondo un risultato del paragrafo precedente, le funzioni $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ descono, mediante le formule di Lelieuvre, una nuova rigata $\bar{R}_a$ Evitemente si ha che:

Le due rigate R_a, $\overline{R}_a$, quando siano collocate opportunamente nello spazio, sono le falde focali di una congruenza W_a.

11. Esaminiamo che cosa avviene se a funzione trasformatrice assumesi:

$$R = \lambda(v).$$

Le funzioni trasformate di ξ, η, ζ hanno in tal caso le espressioni:

$$\xi^0 = -\varphi_1(u) + k_1 \Psi(v),$$
$$\eta^0 = -\varphi_2(u) + k_2 \Psi(v),$$
$$\zeta^0 = -\varphi_3(u) + k_3 \Psi(v),$$

con

$$\Psi(v) = -\psi(v) + \frac{2}{\lambda(v)} \int \lambda(v)\psi'(v)\,dv$$

ed esse definiscono, mediante le formule di Lelieuvre, una rigata R_a^0 soltanto se, in ciascuna di esse, si mantiene fissa la costante arbitraria che comparisce in $\Psi(v)$.

Ma allora se $P \equiv (x, y, z)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ sono i punti correnti su R_a, R_a^0 le note condizioni di congruenza[9]):

$$x_0 - x = \begin{vmatrix} \eta^0 & \zeta^0 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

ed analoghe, osservato che è:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \psi'(v)[\varphi_2(u) - \varphi_3(u)],$$

forniscono l'identità:

$$\sum \left[\frac{x_0 - x}{\sqrt{\sum (x_0 - x)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} \right] = 1$$

la quale dimostra che le rigate R_a, R_a^0 non sono distinte e la congruenza W_a degenera nelle generatrici della rigata data R_a ciascuna contata una semplice infinità di volte.

E' il caso ben noto in cui la costruzione di Guichard per le congruenze W cade in difetto[10]), e se quindi si ha riguardo alla corrispondente deformazione infinitesima di R_a si può concludere:

Qualunque rigata R_a è suscettibile, dipendentemente dai valori di una funzione arbitraria di una variabile, di deformazioni infinitesime tali che i suoi punti si spostino normalmente alle generatrici cui appartengono.

---

[9]) Cfr. L. Bianchi, Lezioni etc., 2, p. 51.
[10]) Cfr. L. Bianchi, Lezioni etc., 2, p. 53.

In particolare la conclusione sarebbe la stessa se si ponesse:

$$R = \text{costante}$$

iindi risulta che non esistono congruenze di Darboux a falde focali te[11]).

12. Visto che la trasformazione mediante una funzione della variabile v fornisce effettive congruenze W_a concludiamo:

Le superficie R_a, $\overline{R}_a$ definite mediante le formule di Lelieuvre dalle), (15), *sono le falde focali della più generale congruenza W_a.*

Avuto riguardo alla corrispondente deformazione infinitesima della a assegnata R_a si ha che l'espressione della funzione caratteristica di ngarten è

$$W(u, v) = \frac{\chi(u)}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\chi(u)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}};$$

dipende bene da una funzione arbitraria della variabile u e, manimente, data la R_a, essa può assegnarsi a priori.

§ 3.

Le congruenze W_{ab}.

13. Decidiamo se l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0$$

a trasformarsi nella:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 2 \frac{\varphi'(u) \psi'(v)}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2} \theta.$$

Il sistema (12) a n° 6 scrivesi:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \log \theta}{\partial u} \frac{\partial \log \theta}{\partial v} = \frac{\varphi' \psi'}{[\varphi + \psi]^2}.$$

L'integrale generale della prima essendo:

$$\theta(u, v) = U(u) + V(v)$$

econda impone la condizione;

$$\frac{U' V'}{[U + V]^2} = \frac{\varphi' \psi'}{[\varphi + \psi]^2}$$

quale vediamo subito come possa sodisfarsi nel modo più generale[12]). Integrando rispetto a u otteniamo:

$$\frac{V'}{U + V} = \frac{\psi'}{\varphi + \psi} + f(v)$$

---

[11]) Cfr. L. Bianchi, Lezioni etc., 2, p. 61.

[12]) Cfr. E. Goursat, loc. cit. [7]) 2, n° 173 p. 196.

ed attribuendo a v un valore determinato si deduce che $U(u)$ è della forma:

$$U = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} \qquad (a, b, c, d \text{ costanti})$$

Della medesima forma sarà la funzione V rispetto a ψ, anzi, sostituendo, si trova che deve aversi:

$$V = -\frac{a\psi - b}{c\psi - d}$$

talmente che la soluzione più generale di (a) che la trasformi nella (b) è

$$R(u, v) = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} - \frac{a\psi - b}{c\psi - d} = \frac{\varphi + \psi}{(A\varphi + B)(A\psi - B)}$$

con

$$A = \frac{c}{bc - ad}, \qquad B = \frac{d}{bc - ad}$$

e, come già si è osservato, contiene appunto due costanti arbitrarie.

Ma quel che a noi importa notare è che la equazione (a) mediante la sua soluzione:

$$R = U(u) + V(v)$$

trasformasi appunto nella:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{2U'V'}{[U+V]^2}\theta = \frac{2\varphi'\psi'}{[\varphi+\psi]^2}\theta,$$

con

$$\varphi = \frac{-dU + b}{cU - a}, \qquad \psi = \frac{dV + b}{cV + a},$$

e noi vogliamo ora decidere come debba scegliersi la soluzione R di (a) affinchè la soluzione

$$\text{(16)} \qquad \theta(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$$

di (a) stessa trasformisi in una soluzione di (b) che abbia la forma:

$$\text{(17)} \qquad \bar{\theta}(u, v) = \frac{F'(u)}{U'} - \frac{2F(u)}{U+V}.$$

Intanto, mediante le note formule di trasformazione, trovasi per $\bar{\theta}(u, v)$ l'espressione:

$$\bar{\theta}(u, v) = -f_1 + f_2 + 2\,\frac{\int f_1 \frac{\partial R}{\partial u}\,du - \int f_2 \frac{\partial R}{\partial v}\,dv}{R}.$$

Posto:

$$\varphi_0(u) = \int f_1 \frac{\partial R}{\partial u}\,du, \qquad \psi_0(v) = \int f_2 \frac{\partial R}{\partial v}\,dv,$$

si può scrivere:

$$\text{(18)} \qquad \bar{\theta}(u, v) = -\frac{\varphi_0'}{U'} + \frac{\psi_0'}{V'} + 2\,\frac{\varphi_0 - \psi_0}{U+V}$$

e sotto tale forma è evidente che $\bar{\theta}$ è soluzione di (b).

Uguagliando le due espressioni di $\bar{\theta}$ otteniamo:

$$-\frac{(\varphi_0' + F')}{U'} + 2\frac{(\varphi_0 + F)}{U+V} = -\frac{\psi_0'}{V'} + 2\frac{\psi_0}{U+V}$$

con un ragionamento analogo a quello fatto al n° 4°, concludesi dover ere:

$$\psi_0(v) = AV^2 + BV + C,$$
$$\varphi_0(u) + F(u) = AU^2 - BU + C,$$

A, B, C costanti.

Queste forniscono:

$$\psi_0' = 2AVV' + BV',$$
$$\varphi_0' + F' = 2AUU' - BU',$$

quali, confrontate con le

$$\psi_0' = f_2 V', \qquad \varphi_0' = f_1 U',$$

no:

$$V = \frac{1}{2A}(f_2 - B),$$

$$U = \frac{1}{2A}\left(f_1 + B - \frac{F'}{U'}\right).$$

Tali condizioni essendo sodisfatte, effettivamente la (16) trasformasi a (17).

Perchè dunque la trasformazione avvenga nelle condizioni volute orre e basta in sostanza che, essendo $U(u)$ una funzione arbitraria, V abbia la forma (19).

14. Si abbia ora una rigata R_a per la quale sia al solito:

$$\xi = \varphi_1(u) + k_1\psi(v),$$
$$\eta = \varphi_2(u) + k_2\psi(v),$$
$$\zeta = \varphi_3(u) + k_3\psi(v),$$

erchiamo di determinare

$$R(u, v) = U(u) + V(v)$$

al maniera che le trasformate $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ di ξ, η, ζ ordinatamente siano a forma:

$$\bar{\xi} = \frac{F_1'(u)}{U'} - \frac{2F_1(u)}{U+V},$$

$$\bar{\eta} = \frac{F_2'(u)}{U'} - \frac{2F_2(u)}{U+V},$$

$$\bar{\zeta} = \frac{F_3'(u)}{U'} - \frac{2F_3(u)}{U+V}.$$

Se la cosa è possibile, indicando con α_i, β_i delle costanti, a causa di (19), devono coesistere le relazioni:

$$(23) \qquad V(v) = \alpha_1 k_1 \psi - \beta_1 = \alpha_2 k_2 \psi - \beta_2 = \alpha_3 k_3 \psi - \beta_3$$

e per la (20) le altre:

$$U(u) = \alpha_1 \varphi_1 + \beta_1 - \alpha_1 \frac{F_1'}{U'} = \alpha_2 \varphi_2 + \beta_2 - \alpha_2 \frac{F_2'}{U'} = \alpha_3 \varphi_3 + \beta_3 - \alpha_3 \frac{F_3'}{U'}.$$

Le (23), poichè non può essere $\psi = \text{cost.}$, dànno:

$$\beta_i = \beta, \qquad \alpha_i k_i = \alpha \qquad (i = 1, 2, 3$$

onde:

$$(24) \qquad V(v) = \alpha \psi - \beta,$$

$$(25) \quad U(u) = \frac{\alpha}{k_1} \varphi_1 + \beta - \frac{\alpha}{k_1} \frac{F_1'}{U'} = \frac{\alpha}{k_2} \varphi_2 + \beta - \frac{\alpha}{k_2} \frac{F_2'}{U'} = \frac{\alpha}{k_3} \varphi_3 + \beta - \frac{\alpha}{k_3} \frac{F_3'}{U'}$$

ed effettivamente verificasi che, tali relazioni essendo sodisfatte, la trasformazione di ξ, η, ζ avviene nella maniera voluta. Si vede adunque che, assegnate arbitrariamente nella (24) le costanti α e β, per sodisfare la (25) si ha l'arbitrarietà di una funzione della variabile u; assegnata quindi in modo arbitrario la $U(u)$ restano poi pienamente determinate F_1', F_2', F_3'. Le (22) definiscono una rigata $\bar{R}_b$. Manifestamente si ha che

Le rigate R_a, $\bar{R}_b$, collocate opportunamente nello spazio, sono le falde focali della più generale congruenza W_{ab}.

Osservisi ancora che, fissata arbitrariamente $U(u)$ e le costanti α, β, per ogni funzione $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ disponesi ancora di una costante arbitraria e quindi:

Data una rigata R_a e fissata una funzione trasformatrice:

$$R(u, v) = U(u) + \alpha \psi(v) - \beta$$

esistono ∞^3 congruenze W_{ab} le quali ammettono la R_a come una delle falde focali.

Inversamente; se una rigata R_b è definita mediante le (22), fissate ad arbitrio cinque costanti α, β; α_1, α_2, α_3 le (23) dànno:

$$k_i \psi(v) = \frac{V + \beta}{\alpha_i}$$

e le (25):

$$\varphi_i(u) = \frac{k_i}{\alpha}(U - \beta) + \frac{F_i'}{U'} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

onde risulta:

$$\xi = \frac{k_1}{\alpha}(U + V) + \frac{F_1'}{U'} = \frac{1}{\alpha_1}(U + V) + \frac{F_1'}{U'},$$

$$\eta = \frac{k_2}{\alpha}(U+V) + \frac{F_2'}{U'} = \frac{1}{\alpha_2}(U+V) + \frac{F_2'}{U'},$$

$$\zeta = \frac{k_3}{\alpha}(U+V) + \frac{F_3'}{U'} = \frac{1}{\alpha_3}(U+V) + \frac{F_3'}{U'}$$

ξ, η, ζ risultano allora le trasformate di $\xi, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$ a mezzo della soluzione:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{U+V}$$

), come può direttamente verificarsi a mezzo delle formule di Moutard. Si osservi che le espressioni di ξ, η, ζ non dipendono in alcun modo costanti α, β onde risulta che:

Una rigata $\overline{R}_b$ assegnata si può pensare come una delle falde focali ∞^3 congruenze W_{ab}.

In particolare segue da qui, come era del resto evidente a priori, può senza restrizione ritenersi $\alpha = 1$, $\beta = 0$ con che si ha semplicemente:

$$V = \psi,$$

$$\varphi_i = k_i U + \frac{F_i'}{U'}.$$

15. Considerando ora le deformazioni infinitesime della falda R_a nata, si ha che la funzione caratteristica di Weingarten ha l'es- ione:

$$W(u,v) = \frac{R}{\sqrt{\varrho}} = \frac{U+V}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = \frac{U(u)+\alpha\psi(v)-\beta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

contiene bene una funzione arbitraria della variabile u, ed, evidente- e, può assegnarsi a priori.

Aggiungiamo che:

Le congruenze W corrispondenti ai movimenti rigidi infinitesimi na rigata R_a sono tutte congruenze W_{ab}.

Posto infatti:

$$U(u) = a_0\varphi_1 + b_0\varphi_2 + c_0\varphi_3 \qquad (a_0, b_0, c_0 \text{ costanti});$$

$$\alpha = a_0 k_1 + b_0 k_2 + c_0 k_3; \qquad \beta = 0$$

i:

$$(u,v) = \frac{a_0\varphi_1 + b_0\varphi_2 + c_0\varphi_3 + (a_0 k_1 + b_0 k_2 + c_0 k_3)\psi}{\sqrt{\varrho}} = a_0 X + b_0 Y + c_0 Z;$$

e funzione caratteristica corrisponde bene ad un movimento puro. Viceversa, per

$$W(u,v) = a_0 X + b_0 Y + c_0 Z = \frac{a_0\xi + b_0\eta + c_0\zeta}{\sqrt{\varrho}},$$

cedenti valori di U, α, β forniscono una funzione trasformatrice R ante la quale dalla rigata R_a ottienesi una rigata $\overline{R}_b$, a meno che non $\alpha = 0$, unico caso in cui si ottiene una rigata $\overline{R}_a$ e, corrispondente- e, una congruenza W_a.

§ 4.

Le congruenze W_b.

16. Ricerchiamo in quali circostanze l'equazione:

$$(b') \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\theta$$

si trasformi mediante la sua soluzione $R = e^{\lambda}$ in una equazione del tipo

$$(b) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\varphi'(u)\,\psi'(v)}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}\theta.$$

Il sistema (13) scrivesi in questo caso:

$$(26) \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{(u+v)^2} - \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{\varphi'\psi'}{(\varphi+\psi)^2}.$$

L'integrale generale della prima di queste equazioni è:

$$\lambda = f_1(u) + f_2(v) + \log\frac{\varphi+\psi}{u+v}$$

con f_1, f_2 arbitrarie; la seconda equazione fornisce poi fra f_1, f_2, φ, il legame:

$$f_1'f_2' + \frac{f_1'\psi' + f_2'\varphi'}{\varphi+\psi} - \frac{f_1'+f_2'}{u+v} - \frac{\varphi'+\psi'}{(u+v)(\varphi+\psi)} = 0$$

e manifestamente, scelte quattro funzioni sodisfacenti a tale relazione la (b') mediante la sua soluzione

$$R(u,v) = e^{f_1+f_2}\frac{\varphi+\psi}{u+v}$$

trasformasi nella (b).

17. Per il nostro scopo ci conviene però affrontare il problema della trasformazione in altro modo richiamando un risultato della teoria generale delle equazioni ad invarianti uguali. E' noto [13]) che la soluzione:

$$(27) \qquad \theta(u,v) = U'(u) - \frac{2U(u)}{u+v}$$

della equazione (b'), mediante la soluzione generale:

$$R(u,v) = \beta'(u) + \gamma'(v) - \frac{2[\beta(u)+\gamma(v)]}{u+v}$$

trasformasi nella funzione:

$$(28) \qquad \bar\theta(u,v) = U' - \frac{2U}{u+v} - \frac{2U}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{2}{R}\int U\beta'''\,du$$

la quale è soluzione della equazione:

$$\frac{\partial^2\bar\theta}{\partial u\,\partial v} = \bar M\bar\theta$$

---

[13]) Cfr. G. Darboux, loc. cit. [5]), 2, n° 395.

$$\overline{M} = -2\,\frac{\partial^2 \log[-R(u+v)]}{\partial u\,\partial v}.$$

Ora, per il nostro studio, a noi interessa considerare soltanto quelle formazioni di Moutard della (b′) per le quali non solo risulti

$$\overline{M} = \frac{2\varphi'\psi'}{[\varphi+\psi]^2},$$

ancora tali che una soluzione della (b′) avente la forma (27) si muti na soluzione di (b) avente la forma:

$$\bar{\theta} = \frac{\Phi'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi(u)}{\varphi+\psi}.$$

Se esiste una tale trasformazione diremo che essa avviene *con conser-one di forma*.

Uguagliando le due espressioni di $\bar{\theta}$ (28) e (29); derivando rapporto tenendo presente il sistema (26) del n° 16 al quale la funzione tra-matrice R deve certo sodisfare, eseguita ogni riduzione ottienesi:

$$\frac{U\varphi'\psi'}{[\varphi+\psi]^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial v}\int U\beta'''\,du = \frac{\psi'\Phi(u)}{[\varphi+\psi]^2}$$

e se supponesi:

$$\int U\beta'''\,du \neq 0$$

endo:

$$2F_0(u) = \frac{U\varphi' - \Phi(u)}{\int U\beta'''\,du}$$

enesi:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{2\psi' F_0(u)}{[\varphi+\psi]^2}.$$

Ma, poichè deve aversi:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{2\varphi'\psi'}{[\varphi+\psi]^2}\frac{1}{R},$$

vando la precedente rispetto ad u ottienesi:

$$\frac{1}{R} = \frac{F_0'(u)}{\varphi'} - \frac{2F_0(u)}{\varphi+\psi}.$$

Poichè la trasformazione inversa della equazione (b) nella (b′) deve pure enire con conservazione di forma mediante la funzione $\frac{1}{R}$ segue che, lesimamente, indicando con $f_0(u)$ una funzione di u, deve aversi:

$$R = f_0'(u) - \frac{2f_0(u)}{u+v}.$$

Risulta adunque che, affinchè la trasformazione avvenga nelle condizioni te, è necessario che la funzione trasformatrice R abbia la forma (31).

Io dimostrerò che tale condizione è pure sufficiente; prima però esamineremo che cosa avvenga quando si supponga:

$$\int U\beta'''\,du = 0$$

e mostreremo che tale ipotesi non ha alcun interesse pel nostro studio.

18. Il risultato precedente viene a mancare se, essendo $\beta''' = 0$, supponesi inoltre nulla la costante arbitraria che il segno di quadratura introduce nella espressione di $\bar{\theta}$.

In tali condizioni l'espressione di $\bar{\theta}$ è:

$$\bar{\theta}(u,v) = U' - \frac{2U}{u+v} - \frac{2U}{R}\frac{\partial R}{\partial u}. \tag{32}$$

Posto ancora:

$$\bar{\theta} = \frac{\Phi'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi(u)}{\varphi+\psi},$$

uguagliando le espressioni di $\bar{\theta}$ e derivando rispetto a v traesi, in modo analogo a quello adoperato dianzi:

$$U\varphi' = \Phi(u)$$

e facilmente verificasi che, inversamente, con tale posizione, qualunque sia in R la funzione $\gamma(v)$, la trasformazione della equazione (b′) avviene con conservazione di forma. Infatti, oltre a valere la (24) poichè è:

$$\beta(u) = au^2 + bu + c \qquad (a, b, c \text{ costanti})$$

posto:

$$\alpha(v) = av^2 - bv + c$$

l'espressione di R diventa.

$$R = V'(v) - \frac{2V(v)}{u+v}$$

con

$$V(v) = \alpha(v) + \gamma(v)$$

e per l'invariante $\overline{M}$ della equazione trasformata ottienesi:

$$\overline{M} = \frac{-2V'^2 + 4VV''}{[V'(u+v) - 2V]^2} = \frac{2\mu'(v)}{[u+\mu(v)]^2},$$

con

$$\mu(v) = v - \frac{2V}{V'}.$$

Vediamo l'interpretazione geometrica della trasformazione.

Per una rigata R_b data si abbia al solito:

$$\xi = f_1'(u) - \frac{2f_1(u)}{u+v}, \qquad \eta = f_2'(u) - \frac{2f_2(u)}{u+v}, \qquad \zeta = f_3'(u) - \frac{2f_3(u)}{u+v};$$

le espressioni delle loro trasformate mediante la R sono, conformemente alla formula (32):

$$\bar{\xi} = \xi - 2f_1 \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial u}, \qquad \bar{\eta} = \eta - 2f_2 \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial u}, \qquad \bar{\zeta} = \zeta - 2f_3 \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial u}$$

er quanto precede, queste definiscono, mediante le formule di Lelieuvre seconda rigata $\bar{R}_b$.

Ma le ben note condizioni di congruenza[14]):

$$\bar{x} - x = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \bar{\eta} & \bar{\zeta} \end{vmatrix} = -2 \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial u} \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = -2 \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial u} (f_2' f_3 - f_3' f_2)$$

analoghe, unite alla:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{2}{(u+v)^2} (f_2' f_3 - f_3' f_2)$$

naloghe, forniscono l'indentità:

$$\sum \left[\frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\sum (\bar{x} - x)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} \right] = 1$$

quale prova che la congruenza W_b corrispondente riducesi alle genera-i della rigata $R_b \equiv \bar{R}_b$ ciascuna contata una semplice infinità di volte.

La congruenza W_b viene quindi in sostanza a mancare.

Tale circostanza mette in luce il teorema:

Ogni rigata R_b ammette, dipendentemente da una funzione arbitraria la variabile v, deformazioni infinitesime per le quali ogni suo punto stasi normalmente alla generatrice cui appartiene.

19. Per proseguire il nostro studio noi dovremo dunque occuparci del caso in cui sia:

$$\int U \beta''' \, du \neq 0$$

o no $\beta''' = 0$. Secondo quanto abbiamo detto dimostriamo che la dizione che R sia della forma:

$$R(u, v) = f_0'(u) - \frac{2 f_0(u)}{u + v}$$

ufficiente perchè la trasformazione della equazione (b′) avvenga con servazione di forma.

Intanto trovasi subito:

$$\overline{M}(u, v) = \frac{-2 f_0'^2 + 4 f_0 f_0''}{[(u+v) f_0' - 2 f_0]^2} = \frac{2 \lambda'(u)}{[\lambda(u) + v]^2};$$

$$\lambda(u) = \varphi(u) = u - 2 \frac{f_0}{f_0'}, \qquad \psi(v) = v$$

---

[14]) Cfr. loc. cit. [9]).

inoltre la soluzione:

$$\theta(u, v) = U'(u) - \frac{2U(u)}{u+v}$$

della (b') trasformasi nella soluzione:

$$\bar{\theta}(u, v) = \theta(u, v) - \frac{2U}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{2}{R}\int U f_0''' du$$

e, come facilmente dimostrasi e verificasi, essa è della forma:

$$\bar{\theta}(u, v) = \frac{\Phi'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi(u)}{\varphi+\psi}$$

con

$$\Phi(u) = U\varphi' - \frac{2f_0}{f_0'^2}\int U f_0''' du.$$

Inoltre, confrontando questa con la (30), deducesi:

$$F_0(u) = -\frac{f_0(u)}{f_0'^2(u)}$$

ed effettivamente, con le precedenti espressioni di φ, ψ trovasi:

$$\frac{F_0'}{\varphi'} - \frac{2F_0}{\varphi+\psi} = \frac{u+v}{(u+v)f_0'(u) - 2f_0(u)} = \frac{1}{R},$$

con la quale identità resta pienamente provato quanto si doveva.

Concludiamo adunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione:

(b') $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\theta}{[u+v]^2}$$

ammetta una trasformata di Moutard del tipo:

(b) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\varphi'(u)\psi'(v)}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}\theta,$$

ed inoltre una soluzione di (b') *avente la forma:*

$$\theta = f'(u) - \frac{2f(u)}{u+v}$$

abbia per trasformata una soluzione di (b) *della forma:*

$$\theta = \frac{F'(u)}{\varphi'} - \frac{2F(u)}{\varphi+\psi},$$

è che a funzione trasformatrice assumasi una soluzione di (b) *della forma:*

$$R(u, v) = f_0' - \frac{2f_0}{u+v}$$

f_0 *essendo una funzione o di* u *o di* v.

A causa del risultato conseguito al n° precedente a noi interessa solo il caso in cui sia f_0 funzione della variabile u.

20. Senza restrizione, la più generale rigata R_b può definirsi ponendo:

$$\xi = f_1'(u) - \frac{2f_1(u)}{u+v},$$

$$\eta = f_2'(u) - \frac{2f_2(u)}{u+v},$$

$$\zeta = f_3'(u) - \frac{2f_3(u)}{u+v},$$

f_1, f_2, f_3 arbitrarie, essendo appunto:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{2\theta}{[u+v]^2}$$

quazione di Moutard associata alle asintotiche.

Assunta una funzione trasformatrice del tipo

$$R(u, v) = f_0'(u) - \frac{2f_0(u)}{u+v},$$

o:

$$\lambda(u) = u - \frac{2f_0(u)}{f_0'(u)},$$

rasformata di (34) è della forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{2\varphi'\psi'\theta}{[\varphi+\psi]^2}$$

$$\varphi(u) = \lambda(u), \qquad \psi(v) = v$$

trasformate di ξ, η, ζ sono ordinatamente:

$$\bar{\xi} = \frac{\Phi_1'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi_1(u)}{\varphi+\psi},$$

$$\bar{\eta} = \frac{\Phi_2'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi_2(u)}{\varphi+\psi},$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\Phi_3'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi_3(u)}{\varphi+\psi},$$

$$\Phi_i(u) = f_i(u)\cdot\lambda'(u) - 2\frac{f_0(u)}{f_0'^2(u)}\int f_i(u)\, f_0'''(u)\, du \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(35), mediante le formule di Lelieuvre, dànno ancora una rigata $\bar{R}_b$. Evidentemente si ha che:

Le due rigate R_b, $\bar{R}_b$ poste opportunamente nello spazio, sono le e focali della più generale congruenza W_b.

Si aggiunga che, assegnata la falda R_b e la funzione trasformatrice cioè in sostanza la funzione f_0 di cui disponesi), disponesi ancora per funzione Φ_i di una costante arbitraria dovuta al segno di quadratura ha dunque che:

Assegnata una rigata R_b ed una funzione trasformatrice R esistono ∞^3 congruenze W_b che ammettono la R_b come una delle falde focali.

21. Infine; per la funzione caratteristica di Weingarten, si ha l'espressione:

$$W(u, v) = \frac{R}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = \frac{(u+v)f_0'(u)-2f_0(u)}{(u+v)\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}};$$

essa contiene ancora la funzione arbitraria $f_0(u)$ ed anche in questo caso manifestamente, essa può assegnarsi a priori.

§ 5.

Le congruenze W a falde quadriche.

22. Per fare una applicazione determiniamo col metodo esposto tutte le congruenze W a falde quadriche.

Cominciamo dal decidere se esistono congruenze W_a a falde quadriche. Per una quadrica Q_a si ha:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 u + b_1 v + c_1, \\ \eta &= a_2 u + b_2 v + c_2, \\ \zeta &= a_3 u + b_3 v + c_3. \end{aligned} \qquad (a_i,\ b_i,\ c_i \text{ costanti}) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{36}$$

Se:

$$R = \chi(u) = \lambda'(u)$$

è la funzione trasformatrice, posto:

$$\Lambda_i = u - \frac{2}{\chi}\int \chi\, du = u - 2\,\frac{\lambda + k_i}{\lambda'}, \qquad (k_i \text{ costante}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_1 \Lambda_1 + b_1 v + c_1, \\ \bar{\eta} &= a_2 \Lambda_2 + b_2 v + c_2, \\ \bar{\zeta} &= a_3 \Lambda_3 + b_3 v + c_3, \end{aligned}$$

onde, nella ipotesi che anche la seconda falda focale sia una quadrica $\bar{Q}_a$, indicando con $\sigma = \sigma(u)$ una funzione da determinare, indicando ancora con A_i, C_i delle costanti, deve essere possibile porre:

$$a_i \Lambda_i + c_i = a_i\left(u - 2\,\frac{\lambda + k_i}{\lambda'}\right) + c_i = A_i \sigma + C_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Se da queste ultime relazioni traesi σ e si uguagliano i valori ottenuti, pervienesi ad equazioni differenziali le quali per la funzione R dànno una espressione della forma:

$$R = \chi(u) = \lambda'(u) = Au + B$$

con A e B costanti.

Tale condizione di forma che è necessaria per la funzione R è anche iciente.

Invero ottienesi allora:

$$A_i = -\frac{Bu+k_i}{Au+B} \qquad (i=1,2,3),$$

alle formule precedenti, per derivazione, traggonsi le altre.

$$a_i A_i' = a_i \frac{Ak_i - B^2}{(Au+B)^2} = A_i \frac{d\sigma}{du} \qquad (i=1,2,3)$$

e quali, data in modo arbitrario la costante A_1, si deduce:

$$A_2 = A_1 \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Ak_2 - B^2}{Ak_1 - B^2}, \quad A_3 = A_1 \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{Ak_3 - B^2}{Ak_1 - B^2}.$$

Inoltre dalla prima, per esempio, delle (37) traesi:

$$\sigma(u) = \frac{a_1}{A_1}(Ak_1 - B^2)\int \frac{du}{(Au+B)^2} = -\frac{1}{A}\frac{a_1}{A_1}\frac{Ak_1 - B^2}{Au+B} - \gamma$$

ssendo una costante additiva arbitraria e, tenuta presente tale espressione $\sigma(u)$, deduconsi le relazioni:

$$C_i - c_i = a_i A_i - A_i \sigma = A_i \gamma - a_i \frac{B}{A} \qquad (i=1,2,3),$$

quali determinano le constanti C_1, C_2, C_3.

Allora effettivamente risultano le relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= A_1 \sigma + b_1 v + C_1, \\ \bar{\eta} &= A_2 \sigma + b_2 v + C_2, \\ \bar{\zeta} &= A_3 \sigma + b_3 v + C_3, \end{aligned}$$

seconda falda della congruenza è quindi una seconda quadrica $\bar{Q}_a$.

Si osservi che, date arbitrariamente le costanti A, B, possonsi sempre erminare tre costanti a, b, c, tali che sia:

$$\begin{aligned} a a_1 + b a_2 + c a_3 &= A, \\ a b_1 + b b_2 + c b_3 &= 0, \\ a c_1 + b c_2 + c c_3 &= B, \end{aligned}$$

che si ha:

$$R = a\xi + b\eta + c\zeta = Au + B$$

uindi concludesi che la deformazione infinitesima di Q_a corrispondente funzione R è un movimento puro.

23. Consideriamo ora le congruenze W_{ab}. Una quadrica Q_a sia defisempre da (36); indichiamo con

$$R = U(u) + V(v)$$

la funzione trasformatrice e con

$$\bar{\xi} = \frac{F_1'}{U'} - \frac{2F_1}{U+V}, \qquad \bar{\eta} = \frac{F_2'}{U'} - \frac{2F_2}{U+V}, \qquad \bar{\zeta} = \frac{F_3'}{U'} - \frac{2F_3}{U+V}$$

le trasformate di ξ, η, ζ.

Nell'ipotesi che la seconda falda della congruenza così ottenuta sia quadrica, deve aversi:

$$F_i(u) = \alpha_i U^2 + \beta_i U + \gamma_i \qquad (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \text{ costanti}, \ i = 1, 2, 3),$$

inoltre deve essere:

$$V(v) = \alpha v - \beta \qquad (\alpha, \beta \text{ costanti})$$

e per le (25) del n° **14**, essendo qui:

$$\varphi_i(u) = a_i u + c_i,$$

ottienesi per $U(u)$ una espressione nella forma;

$$U(u) = \alpha_0 u + \beta_0 \qquad (\alpha_0, \beta_0 \text{ costanti}).$$

In conclusione la funzione trasformatrice R ha la forma:

(38) $$R = Au + Bv + C \qquad (A, B, C \text{ costanti})$$

e nessuna delle costanti A, B potrà essere nulla (cfr. n° **14**). Ma inversamente, con una funzione trasformatrice di tale forma, risulta effettivamente, come è facile verificare:

$$F_i(u) = \alpha_i U^2 + \beta_i U + \gamma_i,$$

onde la seconda falda della congruenza è pure una quadrica $\bar{Q}_b$. Evidentemente si ottiene in tal modo la più generale congruenza W_{ab} a falde quadriche.

Si osservi che, qualunque siano in (38) le costanti A, B, C, può porsi:

$$R = A_0 \xi + B_0 \eta + C_0 \qquad (A_0, B_0, C_0 \text{ costanti})$$

onde la corrispondente deformazione infinitesima di Q_a (e quindi anche di Q_b) è un movimento puro.

24. In terzo luogo, ricerchiamo se una congruenza W_b possa avere due quadriche Q_b, $\bar{Q}_b$ per falde focali.

Per la Q_b si abbia:

$$\xi = f_1'(u) - \frac{2f_1(u)}{u+v}, \quad \eta = f_2'(u) - \frac{2f_2(u)}{u+v}, \quad \zeta = f_3'(u) - \frac{2f_3(u)}{u+v},$$

con

(39) $$f_i(u) = a_i u^2 + b_i u + c_i \qquad (a_i, b_i, c_i \text{ costanti}, \ i = 1, 2, 3).$$

Sia:

$$R = f_0'(u) - \frac{2f_0(u)}{u+v}$$

funzione trasformatrice, si ha ad esempio:

$$\bar{\xi} = \frac{\Phi_1'(u)}{\varphi'} - \frac{2\Phi_1(u)}{\varphi+\psi}$$

) $$\Phi_1(u) = f_1\lambda' - \frac{2f_0}{f_0'^2}\int f_1 f_0'''\,du,$$

endo

) $$\varphi(u) = \lambda = u - \frac{2f_0}{f_0'}, \quad \psi(v) = v.$$

Se $\overline{Q}_v$ è pure quadrica deve aversi;

) $$\Phi_1(u) = A_1\lambda^2 + B_1\lambda + C_1 \qquad (A_1, B_1, C_1 \text{ costanti}),$$

ltre, essendo:

$$f_1''' = 0$$

ò porsi:

$$\int f_1 f_0'''\,du = f_0'' f_1 - f_0' f_1' + f_0 f_1'' + k_1$$

endo k_1 una costante arbitraria. Sostituendo in (40) ed uguagliando (42), tenuto conto della (41), si perviene ad una relazione della forma:

$$\alpha_1 u^2 + \beta_1 u + \gamma_1 - [4\alpha_1 u + 2\beta_1]\frac{f_0}{f_0'} + 4\alpha_1\frac{f_0^2}{f_0'^2} - 2k_1\frac{f_0}{f_0'^2} = 0$$

$$\alpha_1 = A_1 + a_1, \quad \beta_1 = B_1 + b_1, \quad \gamma_1 = C_1 + c_1$$

a quale la funzione f_0 deve necessariamente sodisfare. Due altre relazioni analoghe otterremmo medesimamente considerando le soluzioni $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ sformate di η, ζ.

Tali relazioni siano:

$$\alpha_2 u^2 + \beta_2 u + \gamma_2 - [4\alpha_2 u + 2\beta_2]\frac{f_0}{f_0'} + 4\alpha_2\frac{f_0^2}{f_0'^2} - 2k_2\frac{f_0}{f_0'^2} = 0,$$

$$\alpha_3 u^2 + \beta_3 u + \gamma_3 - [4\alpha_3 u + 2\beta_3]\frac{f_0}{f_0'} + 4\alpha_3\frac{f_0^2}{f_0'^2} - 2k_3\frac{f_0}{f_0'^2} = 0.$$

Ora se in una di tali relazioni supponesi $k_i = 0$, la relazione stessa stra che la funzione f_0 deve essere una funzione quadratica di u; se $k_i \neq 0$, si elimini fra due delle precedenti tre relazioni il termine in ; la relazione risultante mostra ancora che deve essere f_0 funzione adratica di u. Poniamo:

$$f_0(u) = Au^2 + Bu + C.$$

Inversamente: è facile verificare che con tale espressione di f_0 risulta:

$$\Phi_i(u) = A_i\lambda^2 + B_i\lambda + C_i \qquad (A_i, B_i, C_i \text{ costanti}),$$

de $\overline{Q}_v$ è una quadrica.

Ma, qualunque siano nelle espressioni di f_0 le costanti A, B, C, possono sempre determinarsi tre nuove costanti a, b, c tali che risulti:

$$R(u, v) = a\xi + b\eta + c\zeta$$

onde la corrispondente deformazione infinitesima della quadrica data Q_0 è un movimento puro.

25. Si osservi che i risultati ottenuti nei due numeri precedenti si potevano conseguire in modo assai rapido come segue.

Per le congruenze W_{ab} poichè deve essere:

$$R(u, v) = U(u) + \alpha v - \beta \qquad (\alpha, \beta \text{ costanti})$$

e poichè le cose devono avvenire, nell'ipotesi che anche la seconda falda sia quadrica, in modo simmetrico rispetto alle variabili u, v, deve aversi anche:

$$U(u) = \alpha_1 u - \beta_1 \qquad (\alpha_1, \beta_1 \text{ costanti})$$

onde, in definitiva, una funzione trasformatrice del tipo:

$$R(u, v) = Au + Bv + C$$

come appunto si era trovato.

Per le congruenze W_b poi, le cose dovendo pure avvenire in maniera simmetrica rispetto alle variabili, u, v, la funzione trasformatrice deve essere del tipo:

$$R(u, v) = f_0'(u) - \frac{2f_0(u)}{u+v} = \bar{f}'(v) - \frac{2\bar{f}(v)}{u+v}$$

onde è f_0 funzione quadratica di u, o $\bar{f}$ di v e perciò R combinazione lineare di ξ, η, ζ.

In conclusione risulta ancora qui il teorema di Bianchi[15]: *La più generale congruenza W a falde quadriche si ottiene considerando il più generale movimento puro infinitesimo di una quadrica arbitraria.*

Palermo, febbraio 1920.

---

[15]) Cfr. L. Bianchi, Ricerche sulle deformazioni delle quadriche, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 2° sem. (1906), pp. 75—96.

(Eingegangen am 24. August 1920.)

e zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line.

By

G. H. Hardy and J. E. Littlewood.

1. Introduction.

1. We denote by $N_0(T)$ the number of zeros of $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ which

$$\sigma = \tfrac{1}{2}, \quad 0 < t < T.$$

In a recent memoir in the *Acta Mathematica*[1]) we proved that the r of magnitude of $N_0(T)$ is not much less than $T^{\frac{3}{4}}$. More precisely, proved that to every $\varepsilon > 0$ corresponds a $T_0 = T_0(\varepsilon)$ such that

$$N_0(T) > T^{\frac{3}{4}-\varepsilon} \qquad (T > T_0).$$

Here we go a good deal further. In § 2 we prove

Theorem A. *There is a* $K > 0$ *and a* T_0 *such that*

$$N_0(T) > KT \qquad (T > T_0).$$

The order of magnitude of $N_0(T)$ lies therefore between T and $T \log T$. § 3—5 we prove, by rather more difficult analysis, a more precise t, viz.

Theorem B. *Let* $U = T^a$, *where* $a > \frac{1}{2}$. *Then there is a* $K(a) > 0$ *and a* $T_0 = T_0(a)$ *such that*

$$N_0(T+U) - N_0(T) > KU \qquad (T > T_0).$$

Some of the lemmas on which our argument depends have an interest pendent of the particular application made of them here. We have efore sometimes developed them further than is absolutely necessary ur immediate purpose.

---

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the mann Zeta-Function and the theory of the distribution of primes, *Acta Mathe-a*, **41** (1917), 119—196 (177—184).

2. Proof that $N_0(T) > KT$.

2.1. Lemma 1[2]). *If* $\sigma > 0$, $s \neq 1$, $x > 0$, *then*

$$\zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n \leqq x}{}' n^{-s} = 2(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s} \cos u \, du, \tag{2.11}$$

or

$$\zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} + \left(\frac{1}{2} - x + [x]\right) x^{-s} - \sum_{n \leqq x} n^{-s} = 2s(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} \sin u \, du. \tag{2.111}$$

Suppose first that $\sigma > 1$; and let

$$\psi(v) = \tfrac{1}{2} - v + [v], \quad X = [x].$$

Then

$$s \int_x^{\infty} v^{-s-1} \psi(v) \, dv = \frac{1}{2} x^{-s} - \frac{s x^{1-s}}{s-1} + s \int_x^{\infty} v^{-s-1} [v] \, dv \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-s} - \frac{s x^{1-s}}{s-1} + X(x^{-s} - (X+1)^{-s}) + \sum_{n=X+1}^{\infty} n(n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

Also

$$\zeta(s) - \sum_{n \leqq x} n^{-s} = \sum_{n=X+1}^{\infty} n^{-s} = -X(X+1)^{-s} + \sum_{n=X+1}^{\infty} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) \tag{2.13}$$

From (2.12) and (2.13) it follows that

$$\zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n \leqq x} n^{-s} = -x^{-s} \psi(x) + s \int_x^{\infty} v^{-s-1} \psi(v) \, dv. \tag{2.14}$$

Now

$$\psi(v) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi v}{n}, \tag{2.15}$$

except when v is an integer, when the sum of the series is 0. The trigonometrical series is boundedly convergent throughout any interval of values of v, and $\int_2^{\infty} |v^{-s-1}| \, dv$ is convergent. Hence[3]) we may multiply

---

[2]) The dash over the sign of summation indicates that, if x is an integer, the last term x^{-s} is to be replaced by $\frac{1}{2} x^{-s}$.

The lemma may be proved in various ways. The method followed here was suggested to us by Dr. H. Cramér of Stockholm, and is materially simpler than that which we had adopted originally.

[3]) See, for example, W. H. Young, The application of expansions to definite integrals, *Proc. London Math. Soc.* (2), **9** (1919), 463—485 (468).

5) by sv^{-s-1} and integrate term by term over the interval (x, ∞).

$$s\int_x^\infty v^{-s-1}\psi(v)\,dv = \frac{s}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_x^\infty v^{-s-1}\sin 2n\pi v\,dv$$

$$= 2s(2\pi)^{s-1}\sum_{n=1}^\infty n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s-1}\sin u\,du,$$

6) $$\zeta(s)+\frac{x^{1-s}}{1-s}-\sum_{n\leqq x} n^{-s} = -x^{-s}\psi(x)$$

$$+2s(2\pi)^{s-1}\sum_{n=1}^\infty n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s-1}\sin u\,du,$$

h is equivalent to (2.111). This equation is so far proved only
$\sigma > 1$. But

$$\int_x^\infty u^{-s-1}\sin u\,du = n^{s-1}(2n\pi x)^{-s-1}\cos 2n\pi x - (s+1)\,n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s-2}\cos u\,du$$

$$= O(n^{-2}) + n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty O(u^{-\sigma-2})\,du = O(n^{-2}),$$

ided only $\sigma > -1$, and the series in (2.16) is uniformly convergent
$\geqq -1+\delta > -1$ and any finite range of t. Hence (2.16) is valid
> -1. Also

$$\pi)^{s-1}n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s-1}\sin u\,du = \frac{x^{-s}\sin 2n\pi x}{\pi\quad n} + 2(2\pi)^{s-1}n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s}\cos u\,du$$

> 0. Substituting in (2.16), we obtain (2.11).

The equation (2.111) holds for the wider region $\sigma > -1$. If we
ose $-1 < \sigma < 0$, and make x tend to zero, we obtain the classical
ional equation. The equations are easily modified so as to yield
esentations for $\zeta(s)$ valid over an arbitrary half-plane.

2.2. Lemma 2. *Suppose that* $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$, $|s-1| \geqq \delta > 0$, *and*

1) $$|t| < \frac{2\pi x}{C},$$

e $C > 1$. *Then*

2) $$\zeta(s) = \sum_{n\leqq x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

ormly in s.

We use the result of Lemma 1 in the form (2.111). It is plainly
ient to prove that

3) $$s\sum n^{s-1}I_n = s\sum n^{s-1}\int_{2n\pi x}^\infty u^{-s-1}\sin u\,du = O(x^{-\sigma}).$$

We have

$$2iI_n = \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} e^{iu}\, du - \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} e^{-iu}\, du = j_n + j_n',$$

say. Also

$$j_n = \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} e^{iu}\, du = \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-\sigma-1} e^{i(u-t\log u)}\, du = \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-\sigma-1} e^{iw}\, du,$$

where $w = u - t\log u$. Now

$$\frac{dw}{du} = 1 - \frac{t}{u} \geqq 1 - \frac{t}{2n\pi x} \geqq 1 - \frac{t}{2\pi x} > 1 - \frac{1}{C}$$

and increases steadily as u increases from $2n\pi x$ to infinity. Hence

$$\Re(j_n) = \int_{u=2n\pi x}^{\infty} u^{-\sigma-1} \frac{\cos w\, dw}{1-\frac{t}{u}} = O(nx)^{-\sigma-1} \int_{w_1}^{w_2} \cos w\, dw = O(nx)^{-\sigma-1}.$$

The same argument may be applied to the imaginary part of j_n and t
both components of j_n' [4]). Hence

$$I_n = O(nx)^{-\sigma-1},$$

and the series (2.23) takes the form

$$O\left(|t| \sum n^{\sigma-1} O(nx)^{-\sigma-1}\right) = O(x^{-\sigma-1}|t|) = O(x^{-\sigma}).$$

Lemma 3. *There is a constant A such that*

$$\eta(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n\leqq x} (-1)^{n-1} n^{-s} + O(x^{-\sigma})$$

uniformly for $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$, $|t| < Ax$.

For

$$\sum_{n\leqq x} (-1)^{n-1} n^{-s} = \sum_{n\leqq x} n^{-s} - 2^{1-s} \sum_{n\leqq \frac{1}{2}x} n^{-s} + O(x^{-\sigma})$$

$$= (1-2^{1-s})\,\zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - 2^{1-s}\frac{(\frac{1}{2}x)^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma}) = \eta(s) + O(x^{-\sigma})$$

by Lemma 2, if A is sufficiently small. The restriction that $|s-1| \geqq \delta > 0$ may obviously be omitted here.

Lemma 4. *There is a constant A such that*

$$\Theta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{-s}}{\log n} = \sum_{n\leqq x} \frac{(-1)^{n-1} n^{-s}}{\log n} + O(x^{-\sigma})$$

uniformly for $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$, $|t| < Ax$.

---

[4]) The argument with j_n' is simpler, as $1+\frac{t}{u}$ occurs instead of $1-\frac{t}{u}$, and the inequality (2.21) is not required.

For, if $[x] = X$,

$$\sum_{n=X+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{-s}}{\log n} = \sum_{n=X+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)} \right) \sum_{m=X+1}^{n} (-1)^{n-1} n^{-s}$$

$$= \sum_{n=X+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n (\log n)^2} \right) O(x^{-\sigma}) = O(x^{-\sigma}),$$

Lemma 3.

2.3. Lemma 5. *If* $1 \leqq m \leqq \mu$, $1 \leqq n \leqq \mu$, $m \neq n$, *then*

1) $$\sum \frac{1}{\sqrt{mn} \left| \log \frac{m}{n} \right|} = O(\mu \log \mu).$$

We write

$$\sum = \sum_{m < \frac{1}{2} n} + \sum_{\frac{1}{2} n \leqq m \leqq \frac{3}{2} n} + \sum_{\frac{3}{2} n < m} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3,$$

Then

$$\sum_1 = O\left(\sum_{m,n=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{mn}} \right) = O\left(\sum_{n=1}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = O(\mu),$$

so for $\sum_3$. In $\sum_2$ we have $m = n + r$, where $|r| \leqq \frac{1}{2} n$, and

$$\frac{1}{\left| \log \frac{m}{n} \right|} = O\left(\frac{n}{|r|} \right).$$

ce

$$\sum_2 = O\left(\sum_{n=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{\frac{1}{2} n} \frac{1}{\sqrt{n(n+r)}} \frac{n}{r} \right) = O\left(\sum_{n=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \right) = O(\mu \log \mu).$$

This lemma is frequently useful. But what we shall require imately is a slightly different result, viz:

Lemma 6. *If* $2 \leqq m \leqq \mu$, $2 \leqq n \leqq \mu$, $m \neq n$, *then*

2) $$\sum \frac{1}{\sqrt{mn} \log m \log n \left| \log \frac{m}{n} \right|} = O\left(\frac{\mu}{\log \mu} \right).$$

Dividing up the summation as in Lemma 6, we obtain

$$\sum_1 = O\left(\sum_{n=2}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{n} \log n} \right)^2 = O\left(\frac{\mu}{(\log \mu)^2} \right)$$

$$\sum_2 = O\left(\sum_{n=2}^{\mu} \frac{1}{(\log n)^2} \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r} \right) = O\left(\frac{\mu}{\log \mu} \right).$$

2.4. Lemma 7. *If*

) $$\psi(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\log n} n^{-\frac{1}{2} - it}$$

then

$$\int_T^{2T} |\psi(t+u)|^2 dt = O(T), \tag{2.42}$$

uniformly for $0 \leqq u \leqq T$.

This is the proposition we shall actually use. It is plainly sufficien to prove it when $u = 0$; and in this form it is an immediate corollary o

Lemma 8. *If*

$$\chi(s) = \sum^{\infty}_{n=2} \frac{(-1)^{n-1} n^{-s}}{\log n} \tag{2.43}$$

then

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left|\chi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}. \tag{2.44}$$

By Lemma 4, we have

$$\chi\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \sum^{'}_{n<AT} \frac{(-1)^{n-1}}{\log n} n^{-\frac{1}{2}-it} + O(T^{-\frac{1}{2}}) = \Theta + O(T^{-\frac{1}{2}}), \tag{2.45}$$

say; and so

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \left|\chi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt &= \int_{-T}^{T} |\Theta|^2 dt + O\left(T^{-\frac{1}{2}} \int_{-T}^{T} |\Theta|\, dt\right) + O(1) \\ &= \int_{-T}^{T} |\Theta|^2 dt + O\left(\int_{-T}^{T} |\Theta|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + O(1).\end{aligned} \tag{2.46}$$

Now

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} |\Theta|^2 dt &= 2T \sum_{n<AT} \frac{1}{n(\log n)^2} + \sum' \frac{(-1)^{m+n}}{\sqrt{mn}\log m \log n} \int_{-T}^{T} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \\ &= 2T \sum_{n<AT} \frac{1}{n(\log n)^2} + O\left(\sum' \frac{1}{\sqrt{mn}\log m \log n \left|\log \frac{m}{n}\right|}\right),\end{aligned} \tag{2.47}$$

where the double summations are defined as in Lemma 6, with $\mu = AT$. From (2.32), (2.47), and (2.46) it follows that

$$\int_{-T}^{T} \left|\chi\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \sim \int_{-T}^{T} |\Theta|^2 dt \sim 2T \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

2.5. Lemma 9. *If* $0 < k < 1$, *the real parts*[5]) *of* a *and* b *lie betwee*

[5]) We are concerned with the case in which a and b are pure imaginaries. F the definition of $H_1^{\nu}(x)$, see Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktione* p. 17.

and $1-k$, *the real part of* y *is positive, and* y^{-2s} *has its principal*
e, then

$$1) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s+a)\,\Gamma(s+b)\,y^{-2s}\,ds = i\pi y^{a+b}\,e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,H_1^{\nu}(2iy),$$

e

$$11) \qquad \nu = a-b$$

$H_1^{\nu}(x)$ *is Hankel's cylinder-function.*

We find, in fact, by a straightforward calculation of which it is
ly necessary to give the details, that the value of the integral is

$$y^{a+b}\left(e^{\frac{1}{2}(a-b)\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(iy)^{2n-a+b}}{n!\,\Gamma(1-a+b+n)} - e^{-\frac{1}{2}(a-b)\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(iy)^{2n+a-b}}{n!\,\Gamma(1+a-b+n)}\right)$$

$$= -\frac{\pi y^{a+b}}{\sin\nu\pi}\,e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\left(e^{-\nu\pi i}J_{\nu}(2iy) - J_{-\nu}(2iy)\right)$$

$$= i\pi y^{a+b}\,e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,H_1^{\nu}(2iy).$$

This proof supposes that $a \neq b$. The result may be at once extended
over this case by a passage to the limit.

Lemma 10. *If* $k > \frac{1}{2}$, *and the other conditions of Lemma 9 are*
fied, then

$$2) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s+a)\,\Gamma(s+b)\,\zeta(2s+2a)\,\zeta(2s+2b)\,y^{-2s}\,ds$$

$$= i\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,y^{a+b}\sum_{n=1}^{\infty} c_n H_1^{\nu}(2in y),$$

e

$$c_n = n^{b-a}\,\sigma_{2(a-b)}(n) = n^{-\nu}\,\sigma_{2\nu}(n) = n^{\nu}\,\sigma_{-2\nu}(n),$$

$\sigma_r(n)$ *denotes the sum of the* r*-th powers of the divisors of* n.

We have

$$3) \qquad \zeta(2s+2a)\,\zeta(2s+2b) = \sum\frac{d_n}{n^{2s}} \qquad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right),$$

e

$$31) \qquad d_n = \sum_{d|n} d^{-2a}\left(\frac{n}{d}\right)^{-2b} = n^{-2a}\,\sigma_{2\nu}(n) = n^{-a-b}\,c_n\,.$$

ow we write ny for y in (2.51), multiply by d_n, and sum, we
in (2.52).

2.6. Suppose that $s = \frac{1}{2} + it$, and write

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}s}\,\Xi(t)}{s(s-1)} = \frac{2\,\pi^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it}\,\Xi(t)}{\frac{1}{4}+t^2} = 2\,\pi^{\frac{1}{4}}\,t^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{1}{4}\pi t}\,\pi^{\frac{1}{2}it}\,X(t),$$

so that $X(t)$ is real for real t. Supposing t positive, and approximating to the Gamma-function by Stirling's Theorem, we obtain

$$(2.61) \qquad \zeta(s) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}\pi i}(2\pi e)^{\frac{1}{2}it} e^{-\frac{1}{2}it\log t} X(t)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

There is of course a conjugate formula when $t<0$.

We write

$$(2.62) \qquad I = I(t,H) = \int_t^{t+H} X(u)\,du.$$

Here H is a constant, which will ultimately be chosen large enough to satisfy certain conditions. We shall suppose $H>2$.

In the arguments preceding 4. 2 A denotes generally an absolute positive constant; so also do B, C, ... A few words are necessary as to the use of O. The constants implied by the O's will also be absolute but there is a reservation which must be made as to the values of the variables $(t, T, \varepsilon, n, m, \ldots)$ for which the inequalities symbolised by the O's are satisfied. We shall frequently be concerned with inequalities of the type (*e. g.*)

$$(2.63) \qquad |F(t)| < f(H)\varphi(t),$$

and, if we wrote this simply in the form $F = O(\varphi)$, the constant of the O would depend upon H. If $f(H)$ is a simple function of H (*e. g.* H^2) we may write

$$F = O(H\varphi) \qquad (i.e.\ |F| < AH\varphi)$$

but sometimes it would be troublesome to maintain this degree of explicitness. We shall therefore sometimes write

$$F = O(f(H)\varphi)$$

meaning thereby that (2. 63) is satisfied for *some* form of the function $f(H)$.

The choice of H will always be prior logically to that of the variables $t, T, \ldots$ which tend to limits. We shall therefore have

$$o(f(H)\varphi) + o(f_1(H)\varphi_1) = o(f(H)\varphi)$$

if $\varphi_1 = O(\varphi)$, whatever be the forms of f and f_1. We can extend this principle to O, writing, *e. g.*,

$$O(T\sqrt{H}) + O(H\sqrt{T}) = O(T\sqrt{H})$$

(since $H\sqrt{T} < T\sqrt{H}$ for $T > T_0(H)$). But then it must be understood that the inequalities symbolised by the O's are only satisfied when T exceeds a certain value, depending on H alone. As we shall, in such cases, be concerned with large values of T only, and H is chosen first, there is no inconvenience in this reservation.

From 4.2 onwards $A, B, C, \ldots$ denote positive numbers depending on the a of Theorem B, and the constants implied by the O's depend a only.

2.71. Lemma 11. *We have*

$$\int_0^T \{I(t,H)\}^2\,dt < AHT \qquad (T > T_0 = T_0(H)). \tag{11}$$

We note first that it is sufficient to prove

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} I^2\,dt < \frac{AH}{\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(H)). \tag{12}$$

then

$$\int_0^T I^2\,dt < e\int_0^T e^{-\frac{t}{T}} I^2\,dt < e\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} I^2\,dt < AHT \qquad (T > T_0).$$

2.72. We return to the result of Lemma 10, taking

$$a = i\alpha, \quad b = i\beta, \quad 0 \leqq \alpha \leqq H, \quad 0 \leqq \beta \leqq H, \quad \alpha \neq \beta.$$

It follows from (2.52) and Cauchy's Theorem[6]) that

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac14 - i\infty}^{\frac14 + i\infty} \Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\zeta(2s+2a)\zeta(2s+2b)y^{-2s}\,ds \tag{21}$$

$$= i\pi e^{\frac12(a+b)\pi i} y^{a+b} \sum_{n=1}^{\infty} c_n H_1^{\nu}(2iny) + \Phi,$$

re

$$\Gamma(\tfrac12+b-a)\zeta(1+2b-2a)y^{-1+2a} + \Gamma(\tfrac12+a-b)\zeta(1+2a-2b)y^{-1+2b}\}.$$

2.73. We take

$$y = \pi e^{i\theta} = \pi e^{i(\frac12\pi - \varepsilon)} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{31}$$

make $\varepsilon \to 0$. It is plain, first that $|\Phi| < f(H)$ or

$$\Phi = O(f(H)). \tag{32}$$

t, we write

$$J = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac14 - i\infty}^{\frac14 - iH} + \int_{\frac14 - iH}^{\frac14 + iH} + \int_{\frac14 + iH}^{\frac14 + i\infty}\right) = J_1 + J + J_3. \tag{33}$$

---

[6]) If $\arg y = \theta$, so that $-\frac12\pi < \theta < \frac12\pi$, we have

$$\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\zeta(2s+2a)\zeta(2s+2b)y^{-2s} = O\left(|t|^A e^{-(\pi - 2\theta)|t|}\right),$$

hat the deformation of the contour presents no difficulty.

Here it is only J_3 that is of importance[7]). We have plainly

$$J_2 = O(f(H)). \tag{2.734}$$

In J_1

$$|\Gamma(\tfrac{1}{4}+i(t+\alpha))| < A|t+\alpha|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi|t+\alpha|} < A|t+H|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi|t+H|},$$
$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+2i(t+\alpha))| < A(|t|^{\frac{1}{3}}+1),$$

and similarly for the factors involving β; and

$$|y^{-2s}| < A e^{2\theta t} < A e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} \qquad (\varepsilon < \tfrac{1}{4}\pi).$$

Hence

$$|J_1| < A\int_{-\infty}^{-H} |t+H|^{-\frac{1}{2}}(|t|^{\frac{1}{3}}+1)^2 e^{-\pi|t+H|-\frac{1}{2}\pi|t|}\,dt \tag{2.735}$$
$$< A\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}(|t+H|^{\frac{1}{3}}+1)^2 e^{-\pi t-\frac{1}{2}\pi(t+H)}\,dt < f(H).$$

We have therefore, from (2.721), (2.732), (2.733), (2.734), and (2.735),

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i\infty} = i\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} y^{a+b} \sum_{n=1}^{\infty} c_n H_1^{\nu}(2iny) + O(f(H)). \tag{2.736}$$

2.74. In J_3 we have

$$y^{-2s} = \pi^{-\frac{1}{2}-2it} e^{-\frac{1}{4}(\pi-2\varepsilon)i} e^{(\pi-2\varepsilon)t},$$
$$\Gamma(s+a)\zeta(2s+2a) = \Gamma(\tfrac{1}{4}+i(t+\alpha))\,\zeta(\tfrac{1}{2}+2i(t+\alpha))$$
$$= A(t+\alpha)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi(t+\alpha)} \pi^{i(t+\alpha)} X(2t+2\alpha)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$
$$= A\,t^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\pi(t+\alpha)} \pi^{i(t+\alpha)} X(2t+2\alpha)\left(1+O\left(\frac{H}{t}\right)\right),$$
$$\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\zeta(2s+2a)\zeta(2s+2b)$$
$$= A\,t^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi t-\frac{1}{2}\pi(\alpha+\beta)} \pi^{2it+i(\alpha+\beta)} X(2t+2\alpha)X(2t+2\beta)\left(1+O\left(\frac{H}{t}\right)\right).$$

Since $X(2t+2\alpha)X(2t+2\beta) = O(f(H)t^{\frac{2}{3}})$ and $y^{-2s} = O(e^{(\pi-2\varepsilon)t})$, the error term contributes

$$O\left(f(H)\int_0^{\infty} t^{-\frac{5}{6}} e^{-2\varepsilon t}\,dt\right) = O(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}}).$$

We have therefore

$$J_3 = A e^{-\frac{1}{4}\pi i} e^{-\frac{1}{2}\pi(\alpha+\beta)} \pi^{i(\alpha+\beta)}(1+O(\varepsilon))\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} X(2t+2\alpha)X(2t+2\beta)\,e^{-2\varepsilon t}\,dt \tag{2.741}$$
$$+ O(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}}).$$

[7]) Because $|y^{-2s}| < A e^{2\theta t}$ and the Gamma-functions provide a factor $e^{-\pi|t|}$.

2.75. Turning our attention to the series on the right hand side (2.736), we have

$$i\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} = A\, i e^{-\frac{1}{2}\pi(a-\beta)},$$

$$y = \pi e^{(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon)i} = i\pi + \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$y^{a+b} = y^{i(a+\beta)} = \pi^{i(a+\beta)} e^{-\frac{1}{2}\pi(a+\beta)}(1+O(\varepsilon)),$$

$$H_1^{\nu}(2iny) = \frac{A}{\sqrt{nyi}} e^{-2ny-\frac{1}{4}\pi i(2\nu+1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{8)}$$

$$= \frac{A}{i}(1+O(\varepsilon))\frac{e^{\frac{1}{2}\pi(a-\beta)}}{\sqrt{i}}\,\frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} e^{O(n\varepsilon^2)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

751) $$i\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} y^{a+b}\sum_{n=1}^{\infty} c_n H_1^{\nu}(2iny)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{i}} e^{-\frac{1}{2}\pi(a+\beta)}\pi^{i(a+\beta)}(1+O(\varepsilon))\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} e^{O(n\varepsilon^2)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Here we may replace $e^{O(n\varepsilon^2)}$ by $1+O(n\varepsilon^2)$, since $e^{An\varepsilon^2} < 1+An\varepsilon^2$ $n\varepsilon^2 < A$ and

$$\sum_{n\varepsilon^2>A} |c_n| \frac{e^{-2n\pi\varepsilon+O(n\varepsilon^2)}}{\sqrt{n}} < \sum_{n\varepsilon^2>A} n e^{-n\pi\varepsilon} < A e^{-\frac{A}{\varepsilon}}.$$

Making this simplification, and comparing (2.736), (2.741) and (2.751), obtain

2) $$(1+O(\varepsilon))\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} X(2t+2\alpha)X(2t+2\beta)e^{-2\varepsilon t}dt + O(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}})$$

$$= (1+O(\varepsilon))A\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O(n\varepsilon^2)\right)+O(f(H)).$$

w

$$c_n = n^{i(\beta-\alpha)}\sigma_{2i(\alpha-\beta)}(n) = O(d(n)) = O\left(n^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$\sum c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\sum n^{-\frac{5}{4}} e^{-2n\pi\varepsilon}\right) = O(1),$$

$$\sum c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} O(n\varepsilon^2) = O\left(\varepsilon^2 \sum n^{\frac{3}{4}} e^{-2n\pi\varepsilon}\right) = O(1),$$

$$O(\varepsilon)\sum c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} = O\left(\varepsilon \sum n^{-\frac{1}{4}} e^{-2n\pi\varepsilon}\right) = O(1).$$

ıce (2.752) may be written in the simpler form

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} X(2t+2\alpha)X(2t+2\beta)e^{-2\varepsilon t}dt = A\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} + O\left(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right).$$

---

8) Nielsen, loc. cit., p. 154.

2.76. We now integrate (2.753) with respect to α and β, in each case over the interval $(0, H)$. So long as ε is positive, the series and integral are uniformly convergent, and we may invert the orders of integration and summation. Since

$$\int_0^H X(2t+2\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_{2t}^{2(t+H)} X(u)\,du,$$

the left hand side gives

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-2\varepsilon t}\,dt \int_0^H X(2t+2\alpha)\,d\alpha \int_0^H X(2t+2\beta)\,d\beta = \frac{1}{4}\int_0^\infty \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-2\varepsilon t}\,(I(2t,2H))^2\,dt.$$

Thus, if we write

$$(2.761)\qquad C_n = \int_0^H\int_0^H c_n\,d\alpha\,d\beta = \int_0^H\int_0^H n^{i(\alpha-\beta)} \sum_{d\mid n} d^{2i(\beta-\alpha)}\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \sum_{d\mid n}\int_0^H\int_0^H \left(\frac{n}{d^2}\right)^{i(\alpha-\beta)} d\alpha\,d\beta = A\sum_{d\mid n}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}H\log\frac{n}{d^2}\right)}{\log\frac{n}{d^2}}\right)^2,$$

we obtain

$$(2.762)\qquad \int_0^\infty \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-2\varepsilon t}\,(I(2t,2H))^2\,dt = A\sum_{n=1}^\infty C_n \frac{e^{-2n\pi\varepsilon}}{\sqrt{n}} + O\left(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right).$$

2.77. We proceed to consider the sum

$$(2.771)\qquad C_m = C_1 + C_2 + \ldots + C_m = \sum_{x>0,\,y>0,\,xy\leqq m}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}H\log\frac{x}{y}\right)}{\log\frac{x}{y}}\right)^2$$

$\left(\text{since } \frac{n}{d^2} = \frac{x}{y} \text{ if } n = xy \text{ and } d = y\right)$. We can write

$$(2.772)\qquad C_m \leqq 2\left(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2\right),$$

where $\sum_1$ is defined by

$$0 < kx \leqq y \leqq x,\quad xy \leqq m,$$

and $\sum_2$ by

$$0 < y \leqq kx,\quad xy \leqq m,$$

Here $\frac{1}{2} < k < 1$: we shall ultimately take $k = 1 - \frac{1}{H}$.

2.781. In $\sum_1$ we use the inequality

$$\left(\frac{\sin Hu}{u}\right)^2 < H^2.$$

e obtain

$$.7811)\quad \sum_1 \leqq H^2\Big(\sum_{1\leqq x\leqq\sqrt{m}}((1-k)x+1)+\sum_{\sqrt{m}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{m}{k}}}\Big(\frac{m}{x}-kx+1\Big)\Big)$$

$$=O(H^2 m(1-k))+O(H^2\sqrt{m})+O\Big(H^2 m\log\frac{1}{k}\Big)$$

$$=O\Big(H^2 m\log\frac{1}{k}\Big)+O(H^2\sqrt{m}),$$

ien $m\to\infty$.

2.782. The terms of $\sum_2$ we divide into two classes as follows. sociate with the point (x,y) the square $Q_{x,y}$ of which two opposite ners are (x,y) and $(x-1,\ y+1)$. In the first class γ_1 we put all ms (x,y) for which the associated square does not cross the line $y=kx$; the second class γ_2 the terms for which it crosses the line.

It is plain that, if (x,y) belongs to γ_1,

$$\frac{}{\Big(\log\frac{x}{y}\Big)^2}<\iint_{Q(x,y)}\frac{d\xi\,d\eta}{\Big(\log\frac{\xi}{\eta}\Big)^2}.$$

nce

$$\sum_{\gamma_1}<\iint\frac{d\xi\,d\eta}{\Big(\log\frac{\xi}{\eta}\Big)^2},$$

en the domain of integration is defined by $0\leqq\eta\leqq k\xi,\ \xi\leqq m,$ $\eta-1)\leqq m$, and *a fortiori* when it is defined by $0\leqq\eta\leqq k\xi;\ \xi\eta\leqq 2m$. ansforming to polar coordinates, we obtain

$$.7821)\quad \sum_{\gamma_1}<\int_0^{\arctan k}\frac{d\theta}{(\log\tan\theta)^2}\int_0^{\sqrt{\frac{2m}{\cos\theta\sin\theta}}}r\,dr=2m\int_0^{\arctan k}\frac{d\theta}{\cos\theta\sin\theta(\log\tan\theta)^2}$$

$$=2m\int_0^k\frac{dt}{t(\log t)^2}=O\Big(\frac{m}{\log\frac{1}{k}}\Big).$$

The number of terms of γ_2 is less than a constant multiple of the gth of the line joining the origin to the point $\Big(\sqrt{\frac{m}{k}},\sqrt{km}\Big)$, or of $\sqrt{m}$. nce

$$.7822)\qquad \sum_{\gamma_2}=O(H^2\sqrt{m}).$$

om (2.772), (2.7811), (2.7821), and (2.7822) we obtain

$$C_m=O\Big(H^2 m\log\frac{1}{k}\Big)+O(H^2\sqrt{m})+O\Big(\frac{m}{\log\frac{1}{k}}\Big).$$

Taking now $k = 1 - \frac{1}{H}$, we obtain

$$\underset{\sim}{C}_m = O(Hm) + O(H^2\sqrt{m}) = O(Hm). \tag{2.783}$$

2.79. We can now complete the proof of Lemma 11. We have, by (2.783) and partial summation,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{C_n}{\sqrt{n}} = O(H\sqrt{m})$$

and so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{n}} e^{-2n\pi\varepsilon} = O\left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Hence, from (2.762),

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-2\varepsilon t} (I(2t, 2H))^2 \, dt = O\left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + O\left(f(H)\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right) = O\left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} (I(2t, 2H))^2 \, dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon t} I^2 \, dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon t} I^2 \, dt = O\left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

This is equivalent to (2.711); and the lemma follows.

Proof of Theorem A.

2.8. We defined I by

$$I = I(t, H) = \int_t^{t+H} X(u) \, du,$$

and we now define $\underset{\sim}{I}$ by

$$\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{I}(t, H) = \int_t^{t+H} |X(u)| \, du.$$

It is plain that $\underset{\sim}{I} = |I|$ if there is no zero of $X(u)$ in $(t, t+H)$.

If

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \qquad (s = \tfrac{1}{2} + it),$$

we have

$$|X(t)| > A\left|\frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}\right| > A|\eta(s)|.$$

Hence

$$\underset{\sim}{I} > A\int_t^{t+H} |\eta(s)| \, dt > A\,\Re\int_t^{t+H} \eta(s) \, dt \tag{2.81}$$

$$= AH + A\,\Re\left(i\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}+i(t+H)} \log n} - i\sum_{n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}+it} \log n}\right)$$

$$= AH + \Psi,$$

y, where

$$\Psi = O(|\psi(t+H)| + |\psi(t)|),$$

the notation of 2.4.

We denote by $\underset{\sim}{T}$ the interval $(T, 2T)$ and by $\underset{\sim}{U}$ the subset of $\underset{\sim}{T}$ which

.82) $$\underset{\sim}{I} < \tfrac{1}{2}AH,$$

being the *same* constant as occurs in (2.81). Then $|\Psi| > \frac{1}{2}AH$ in $\underset{\sim}{U}$. ut, by Lemma 7,

$$\int_{\underset{\sim}{T}}^{2T} |\Psi|^2 dt < BT,$$

, like A, being an absolute constant. Hence, if $m\underset{\sim}{U}$ is the measure $\underset{\sim}{U}$, we have

$$\tfrac{1}{4}A^2H^2 m\underset{\sim}{U} < BT,$$

.83) $$m\underset{\sim}{U} < \varepsilon_H T,$$

here ε_H is a number which tends to zero when $H \to \infty$. Thus

.84) $$\underset{\sim}{I} > \tfrac{1}{2}AH$$

t lies in $\underset{\sim}{T}$ and H is sufficiently large, except perhaps in a subset $\underset{\sim}{U}$ $\underset{\sim}{T}$ whose measure is less than $\varepsilon_H T$.

On the other hand, by Lemma 11, we have

$$\int_{\underset{\sim}{T}}^{2T} I^2 dt < CHT.$$

then

85) $$|I| > \tfrac{1}{2}AH$$

a subset $\underset{\sim}{V}$ of $\underset{\sim}{T}$, of measure $m\underset{\sim}{V}$, we have

$$\tfrac{1}{4}A^2H^2 m\underset{\sim}{V} < CHT,$$

86) $$m\underset{\sim}{V} < \varepsilon_H T.$$

mparing (2.82), (2.85), (2.83) and (2.86), we see that

87) $$|I| < \underset{\sim}{I}$$

roughout all $\underset{\sim}{T}$ except a subset $\underset{\sim}{S}$ of measure less than $\varepsilon_H T$.

2.9. Divide $\underset{\sim}{T}$ into $\left[\frac{T}{2H}\right]$ pairs of abutting intervals j_1, j_2, each, cept the last j_2, of length H, and each j_2 lying immediately to the ht of the corresponding j_1. Then *either j_1 or j_2 contains a zero of (t), unless j_1 consists entirely of points of $\underset{\sim}{S}$.* If the second case urs for ν j_1's, we have $\nu H < \varepsilon_H T$ or

$$\nu < \frac{\varepsilon_H}{H} T.$$

And therefore there are, in $\underset{\sim}{T}$, at least

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_H\right)\frac{T}{H}>\frac{T}{4H}$$

zeros, if H is sufficiently large; which proves the theorem.

3. The approximate functional equation.

3.1. Lemma 12. *Suppose that σ is fixed, $0<\sigma<1$, $t>A$, $\xi>A$, and*

$$I=I(\xi,s)=\int_\xi^\infty u^{-s}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} u\,du. \tag{3.11}$$

Then

$$I=\Gamma(1-s)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\tfrac{1}{2}s\pi+O\left(\frac{\xi^{1-\sigma}}{t}\right)\qquad(\xi<At<t), \tag{3.12}$$

$$I=\Gamma(1-s)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\tfrac{1}{2}s\pi+O\left(\frac{\xi^{2-\sigma}}{t(t-\xi)}\right)\qquad(At<\xi<t), \tag{3.13}$$

$$I=O\left(\frac{\xi^{1-\sigma}}{\xi-t}\right)\qquad(t<\xi<At), \tag{3.14}$$

$$I=O(\xi^{-\sigma})\qquad(t<At<\xi), \tag{3.15}$$

and

$$I=O(\xi^{-\sigma}\sqrt{t}) \tag{3.16}$$

in any case.

It is sufficient to consider the integral which contains $\cos u$; and we suppose first that $\xi>t$. We have

$$2I=\int_\xi^\infty u^{-s}e^{iu}du+\int_\xi^\infty u^{-s}e^{-iu}du=I'+I'',$$

say. In the first place

$$I''=\int_\xi^\infty u^{-\sigma}e^{-i(u+t\log u)}du=\int_\xi^\infty u^{-\sigma}e^{iw}\,du,$$

where

$$w=u+t\log u.$$

Since u and w increase together, we have

$$I''=\int_{u=\xi}^{u=\infty}u^{-\sigma}\frac{e^{-iw}}{1+\frac{t}{u}}\,dw.$$

e real part of I'' is

$$\int_{u=\xi}^{u=\infty} u^{-\sigma} \frac{\cos w}{1+\frac{t}{u}}\, dw = \xi^{-\sigma} \int_{u=\xi}^{u=\xi'} \frac{\cos w}{1+\frac{t}{u}}\, dw \qquad (\xi < \xi')$$

$$= \frac{\xi^{-\sigma}}{1+\frac{t}{\xi'}} \int_{u=\xi''}^{u=\xi'} \cos w\, dw \qquad (\xi < \xi'' < \xi')$$

$$= O(\xi^{-\sigma}).$$

e imaginary part may be treated in the same way. Hence, in proving 14) and (3.15), we need only consider I'.

Again

$$I' = \int_{\xi}^{\infty} u^{-\sigma} e^{i(u - t\log u)}\, du = \int_{\xi}^{\infty} u^{-\sigma} e^{iw}\, du,$$

ere

$$w = u - t\log u.$$

ce $\xi > t$,

$$\frac{dw}{du} = 1 - \frac{t}{u} > 0,$$

that u and w increase together. Hence

$$I' = \int_{u=\xi}^{u=\infty} u^{-\sigma} \frac{e^{iu}}{1-\frac{t}{u}}\, dw.$$

The real part of I' is

$$\int_{u=\xi}^{u=\infty} u^{-\sigma} \frac{\cos w}{1-\frac{t}{u}}\, dw = \frac{\xi^{-\sigma}}{1-\frac{t}{\xi}} \int_{u=\xi}^{u=\xi'} \cos w\, dw = O\left(\frac{\xi^{1-\sigma}}{\xi - t}\right) \qquad (\xi < \xi'),$$

similarly for the imaginary part. Since

$$\frac{\xi}{\xi - t} = O(1) \qquad (\xi > A\,t > t),$$

proves (3.14) and (3.15).

Next, suppose $\xi < t$. Then

$$I = \Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi - \int_0^{\xi} u^{-s}\cos u\, du$$

$$= \Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi - \frac{\xi^{1-s}}{1-s}\cos\xi - \frac{1}{1-s}\int_0^{\xi} u^{1-s}\sin u\, du$$

$$= \Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi + O\left(\frac{\xi^{1-\sigma}}{t}\right) - \frac{1}{1-s}\int_0^{\xi} u^{1-s}\sin u\, du.$$

Hence, in order to prove (3. 12) and (3. 13), it is enough to prove that

$$I_1 = \int_0^{\xi} u^{1-s} \sin u \, du = O\left(\frac{\xi^{2-\sigma}}{t-\xi}\right). \tag{3. 17}$$

Now

$$2iI_1 = \int_0^{\xi} u^{1-s} e^{iu} \, du - \int_0^{\xi} u^{1-s} e^{-iu} \, du = I_1' - I_1'',$$

say. In the first place

$$I_1'' = \int_0^{\xi} u^{1-\sigma} e^{-i(u+t\log u)} \, du = \int_0^{\xi} u^{1-\sigma} e^{-iw} \, du,$$

where $w = u + t\log u$. The real part of I_1'' is

$$\int_{u=0}^{u=\xi} u^{1-\sigma} \frac{\cos w}{1+\frac{t}{u}} \, dw = \frac{\xi^{1-\sigma}}{1+\frac{t}{\xi}} \int_{u=\xi'}^{u=\xi} \cos w \, dw = O(\xi^{1-\sigma}) \qquad (0<\xi'<\xi);$$

and similarly for the imaginary part. Hence, in proving (3. 17), we may confine our attention to I_1'.

Now

$$I_1' = \int_0^{\xi} u^{1-\sigma} e^{i(u-t\log u)} \, du = \int_0^{\xi} u^{1-\sigma} e^{iw} \, du,$$

where $w = u - t\log u$. As $\xi < t$,

$$\frac{dw}{du} = 1 - \frac{t}{u} < 0,$$

so that w decreases as u increases. The real part of I_1' is

$$\int_{u=0}^{u=\xi} u^{1-\sigma} \frac{\cos w}{1-\frac{t}{u}} \, dw = -\frac{\xi^{1-\sigma}}{\frac{t}{\xi}-1} \int_{u=\xi'}^{u=\xi} \cos w \, dw = O\left(\frac{\xi^{2-\sigma}}{t-\xi}\right) \qquad (0<\xi'<\xi).$$

The imaginary part may be treated in the same way, so that we obtain (3. 17), and therefore (3. 12) and (3. 13).

It remains to prove (3. 16). If $\xi \geqq t+\sqrt{t}$, we have

$$I = O\left(\frac{\xi^{1-\sigma}}{\xi-t}\right) = O\left(\xi^{-\sigma}\frac{\xi}{\xi-t}\right) = O(\xi^{-\sigma}\sqrt{t});$$

and if $\xi \leqq t-\sqrt{t}$ we have

$$I = \Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi + O\left(\frac{\xi^{2-\sigma}}{t(t-\xi)}\right) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) + O\left(\xi^{-\sigma}\frac{\xi}{t-\xi}\right) = O(\xi^{-\sigma}\sqrt{t}).$$

nay suppose then that $t-\sqrt{t}<\xi<t+\sqrt{t}$. If $\xi<t$, we write

$$I=\int_{\xi}^{t}+\int_{t}^{t+\sqrt{t}}+\int_{t+\sqrt{t}}^{\infty},$$

f $\xi>t$ we write

$$I=-\int_{t}^{\xi}+\int_{t}^{t+\sqrt{t}}+\int_{t+\sqrt{t}}^{\infty};$$

t is plainly enough to show that

$$\int_{t}^{\eta}u^{-s}e^{iu}du=O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \qquad (t-\sqrt{t}\leqq\eta\leqq t+\sqrt{t});$$

his is obvious, since the integrand is $O(t^{-\sigma})$.

Hence we obtain (3. 18), and the proof of Lemma 12 is completed.

The lemma was stated for positive values of t. The corresponding s when t is negative may be written down at once, by appropriate ges of t into $|t|$.

Lemma 13. *The equations* (3. 14) *and* (3. 15) *of Lemma* 12 *hold ny positive value of* σ.

In fact, in proving these equations, no use was made of the assumption $\sigma<1$.

3. 2. Lemma 14. *If* σ *is fixed and*

$$0<\sigma<1, \quad x>A, \quad y>A, \quad 2\pi xy=|t|,$$

$$\zeta(s)=\sum_{n<x}n^{-s}+\chi\sum_{n<y}n^{s-1}+O(x^{-\sigma})+O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}\right),$$

$$\chi=\left(\frac{|t|}{2\pi e}\right)^{-it}\left(\frac{|t|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{\frac{1}{4}\pi i\operatorname{sgn}t}.$$

This lemma (the 'approximate functional equation') is important in is parts of the theory of $\zeta(s)$. At present, however, we shall be content ove it in an imperfect form, which follows more naturally from our ous analysis and is sufficient for our immediate purpose. We accor- reserve the proof of Lemma 14 for publication elsewhere, and here only

emma 15. *Under the conditions of Lemma* 14,

$$\zeta(s)=\sum_{n<x}n^{-s}+\chi\sum_{n<y}n^{s-1}+O\left((x^{-\sigma}+|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1})\log|t|\right).$$

We may plainly suppose $t > 0$. We have, by Lemma 1,

$$(3.21)\quad \zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n \leqq x} n^{-s} = 2(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s} \cos u \, du$$

$$= 2(2\pi)^{s-1} \Big(\sum_{n < By} + \sum_{By \leqq n \leqq Cy} + \sum_{Cy < n} \Big) = S_1 + S_2 + S_3,$$

say, B and C being constants and $0 < B < 1 < C$.

We begin by considering S_3. We have

$$2(2\pi)^{s-1} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s} \cos u \, du = -\frac{x^{-s}}{n\pi} \sin 2n\pi x + 2s(2\pi)^{s-1} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} \sin$$

$$S_3 = -\frac{x^{-s}}{\pi} \sum_{Cy < n} \frac{\sin 2n\pi x}{n} + 2s(2\pi)^{s-1} \sum_{Cy < n} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s-1} \sin u \, du.$$

The first term here is $O(x^{-\sigma})$, since $\sum \frac{\sin 2n\pi x}{n}$ is boundedly convergent. The second is

$$O\Big(t \sum_{Cy < n} n^{\sigma-1} (nx)^{-\sigma-1}\Big) = O\Big(\frac{t x^{-\sigma-1}}{y}\Big) = O(x^{-\sigma}),$$

by (3.15) and Lemma 13. Hence

$$(3.22)\qquad S_3 = O(x^{-\sigma}).$$

Next, we have, by (3.12),

$$(3.23)\quad S_1 = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sin \tfrac{1}{2} s\pi \sum_{n < By} n^{s-1} + S_1'' = S_1' + S_1'',$$

where

$$(3.24)\quad S_1'' = O\Big(\sum_{n < By} n^{\sigma-1} \frac{(nx)^{1-\sigma}}{t}\Big) = O\Big(\frac{y x^{1-\sigma}}{t}\Big) = O(x^{-\sigma}).$$

From (3.23) and (3.24) we deduce

$$(3.25)\qquad S_1 + S_3 = S_1' + O(x^{-\sigma}).$$

It remains to discuss S_2.

3.3. We have

$$(3.31)\qquad S_2 = 2(2\pi)^{s-1} \sum_{By \leqq n \leqq Cy} n^{s-1} \int_{2n\pi x}^{\infty} u^{-s} \cos u \, du$$

$$= 2(2\pi)^{s-1} \Big(\sum_{By \leqq n \leqq y-A} + \sum_{y-A \leqq n \leqq y+A} + \sum_{y+A < n \leqq Cy} \Big)$$

$$= S_2' + S_2'' + S_2''',$$

By (3.16),

21) $$S_2'' = O\Big(\sum_{y-A\leqq n\leqq y+A} n^{\sigma-1}(nx)^{-\sigma}\sqrt{t}\Big) = O\Big(\frac{x^{-\sigma}\sqrt{t}}{y}\Big) = O\Big(t^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}\Big).$$

Secondly, by (3.14),

22) $$S_2''' = O\Big(\sum_{y+A<n\leqq Cy} n^{\sigma-1}\frac{(nx)^{1-\sigma}}{2n\pi x-t}\Big)$$

$$= O\Big(x^{-\sigma}\sum_{y+A<n\leqq Cy}\frac{1}{n-y}\Big) = O(x^{-\sigma}\log y) = O(x^{-\sigma}\log t).$$

Finally, by (3.13)

23) $$S_2' = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi\sum_{By\leqq n<y-A} n^{s-1} + S_{2,2}' = S_{2,1}' + S_{2,2}'.$$

re

24) $$S_{2,2}' = O\Big(\sum_{By\leqq n<y-A} n^{\sigma-1}\frac{(nx)^{2-\sigma}}{t(t-2n\pi x)}\Big)$$

$$= O\Big(\frac{x^{1-\sigma}y}{t}\sum_{By\leqq n<y-A}\frac{1}{y-n}\Big) = O\Big(\frac{x^{1-\sigma}y\log t}{t}\Big) = O(x^{-\sigma}\log t).$$

From (3.21), (3.25), (3.31), (3.321), (3.322), (3.323) and (3.324), educe

3) $$\zeta(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n\leqq x} n^{-s} = S_1' + S_{2,1}' + O(x^{-\sigma}\log t) + O(t^{\frac{1}{2}-s}y^{\sigma-1})$$

$$= 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\tfrac{1}{2}s\pi\sum_{n<y-A} n^{s-1} + O(x^{-\sigma}\log t) + O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}).$$

$$= O\Big(\frac{x^{1-\sigma}}{t}\Big) = O(x^{-\sigma}),\quad 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\frac{1}{2}s\pi = \chi\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big),$$

$$\chi O\Big(\frac{1}{t}\Big)\sum_{n<y-A} n^{s-1} = O(t^{-\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma}) = O(t^{\frac{1}{2}-\sigma}y^{\sigma-1}),$$

ve may plainly replace $n\leqq x$ and $n<y-A$ by $n<x$ and $n<y$. e we obtain the result of Lemma 15.

4. Discussion of $\int_T^{T+U} I^2\,dt$.

Lemma 16. *If* $A<T<T'$, $0<\xi<T$, $0<\gamma<T$, *then*

) $$\int_T^{T'}\Big(\frac{t}{e\xi}\Big)^{\xi(t+\gamma)}dt = O\Big(\frac{1}{\log\frac{T}{\xi}}\Big).$$

The integral is

$$j = \int_T^{T'} e^{iw}\,dt,$$

where

$$w = (t+\gamma)(\log t - 1 - \log\xi),$$

$$\frac{dw}{dt} = \log\frac{t}{\xi} + \frac{\gamma}{t} > 0,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{t} - \frac{\gamma}{t^2} > 0.$$

The real part of j is

$$\int_{u=T}^{u=T'} \frac{\cos w}{\log\frac{t}{\xi}+\frac{\gamma}{t}}\,dw = \frac{1}{\log\frac{T}{\xi}+\frac{\gamma}{T}} \int_{u=T}^{u=T''} \cos w\,dw = O\left(\frac{1}{\log\frac{T}{\xi}}\right) \quad (T < T'' < T'$$

and similarly for the imaginary part.

Lemma 17. *If t is positive*

$$X(t) = \Theta + \bar{\Theta} + O(t^{-\frac{1}{4}}\log t),$$

where

$$\Theta = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}it} e^{-\frac{1}{8}\pi i} \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}-it}, \quad \tau = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

and $\bar{\Theta}$ is the conjugate of Θ.

Taking $\sigma = \frac{1}{2}$, $x = y = \tau$ in Lemma 15, we obtain

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}-it} + \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} e^{\frac{1}{4}\pi i} \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}-it} + O(t^{-\frac{1}{4}}\log t \tag{4.12}$$

But, by (2.61),

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}\pi i}\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-\frac{1}{2}it} X(t)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Substituting in (4.12), and observing that

$$O\left(\frac{1}{t}\right)\sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}} = O(t^{-\frac{1}{4}}) = O(t^{-\frac{1}{4}}\log t),$$

we obtain the result of the lemma.

4.2. We suppose now that

$$\tfrac{1}{2} < a < b \tag{4.21}$$

and, for the present, that

$$b = \tfrac{5}{8}; \tag{4.22}$$

3) $$T^a < U < T^b$$

24) $$0 < H < T^c,$$

re $c = c(a)$ is a positive constant which will be chosen small enough atisfy a number of conditions appearing in the sequel; and that

25) $$J = J(T, U) = \int_T^{T+U} I^2\, dt,$$

re

26) $$I = I(t, H) = \int_t^{t+H} X(u)\, du.$$

m this point onwards $A, B, C, \ldots$ and the constants of the O's depend n a only.

We shall now prove

Lemma 18. *If* $T^a < U < T^b$, *where* $a > \frac{1}{2}$, *and* $0 < H < T^c$, *re* c *is positive and sufficiently small, then*

$$J = \int_T^{T+U} I^2\, dt = \pi\sqrt{2\pi}\, HU + O\left(\frac{U}{\log T}\right).$$

Suppose that $0 \leqq \alpha \leqq H$, $0 \leqq \beta \leqq H$. Then

$$X(t+\alpha) = \Theta_\alpha + \bar{\Theta}_\alpha + O(t^{-\frac{1}{4}} \log t),$$

re Θ_α is obtained from Θ by writing $t+\alpha$ in the place of t. Since $\sqrt{t+\alpha} - \sqrt{t} = o(1)$, we may replace the limits of summation in Θ_α by τ. Also

$$\left(\frac{t+\alpha}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}i(t+\alpha)} = \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}i(t+\alpha)} e^{\frac{1}{2}i\alpha}\left(1 + O\left(\frac{\alpha^2}{t}\right)\right),$$

the contribution of the error term here to Θ_α is

$$O\left(\frac{\alpha^2}{t}\, t^{\frac{1}{2}}\right) = O(t^{-\frac{1}{4}}),$$

is small enough. Hence

27) $$X(t+\alpha) = \Phi_\alpha + \bar{\Phi}_\alpha + O(t^{-\frac{1}{4}} \log t),$$

re

28) $$\Phi_\alpha = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}i(t+\alpha)} e^{\frac{1}{2}i\alpha - \frac{1}{8}\pi i} \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2} - i(t+\alpha)};$$

and

$$(4.29)\quad X(t+\alpha)\,X(t+\beta)=\Phi_\alpha\Phi_\beta+\bar\Phi_\alpha\bar\Phi_\beta+\Phi_\alpha\bar\Phi_\beta+\bar\Phi_\alpha\Phi_\beta$$
$$+O\Big(t^{-\frac14}\log t\Big|\sum_{n<\tau}n^{-\frac12-i(t+\alpha)}\Big|\Big)+O\Big(t^{-\frac14}\log t\Big|\sum_{n<\tau}n^{-\frac12-i(t+\beta)}\Big|\Big)$$
$$+O(t^{-\frac12}(\log t)^2)=P+\bar P+Q+\bar Q+R_1+R_2+O(t^{-\frac12}(\log t)^2),$$

say.

4.3. We shall prove first that

$$(4.31)\quad \int_T^{T+U}R_1\,dt=O(UT^{-A}),\qquad \int_T^{T+U}R_2\,dt=O(UT^{-A}),$$

uniformly for $0\leqq\alpha\leqq H$, $0\leqq\beta\leqq H$. It is sufficient to consider the first integral.

If $\underline{T}=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$, we have

$$(4.32)\quad \sum_{n<\tau}n^{-\frac12-i(t+\alpha)}-\sum_{n<\underline{T}}n^{-\frac12-i(t+\alpha)}=O\Big(\frac{U}{\sqrt{T}}\,\frac{1}{T^{\frac14}}\Big)=O(T^{-A}),$$

by (4.22) and (4.23), and so

$$R_1=O\Big(t^{-\frac14}\log t\Big|\sum_{n<\underline{T}}n^{-\frac12-i(t+\alpha)}\Big|\Big)+O(T^{-A}).$$

Hence

$$(4.33)\quad \int_T^{T+U}R_1\,dt=O\Big(\int_T^{T+U}t^{-\frac14}\log t\Big|\sum_{n<\underline{T}}n^{-\frac12-i(t+\alpha)}\Big|\,dt\Big)+O(UT^{-A}).$$

The first term on the right hand side is

$$O\Big(T^{-A}\int_T^{T+U}\Big|\sum_{n<\underline{T}}\Big|\,dt\Big)=O\Big(T^{-A}\sqrt{U}\,\Big(\int_T^{T+U}\Big|\sum_{n<\underline{T}}\Big|^2dt\Big)^{\frac12}\Big).$$

But

$$\int_T^{T+U}\Big|\sum_{n<\underline{T}}\Big|^2dt=\sum_{m,n<\underline{T}}\frac{1}{\sqrt{mn}}\int_T^{T+U}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{i(t+\alpha)}dt$$
$$=U\sum_{n<\underline{T}}\frac{1}{n}+O\Big(\sum_{m,n<\underline{T}}{}'\frac{1}{\sqrt{mn}\,\Big|\log\frac{m}{n}\Big|}\Big)\ ^{9})$$
$$=O(U\log T)+O(\underline{T}\log T)=O(U\log T),$$

by Lemma 5, (4.21), and (4.23). Hence

$$(4.34)\quad T^{-A}\int_T^{T+U}\Big|\sum_{n<\underline{T}}\Big|\,dt=O(T^{-A}\sqrt{U}\,\sqrt{U\log T})=O(UT^{-A}),$$

and (4.31) now follows from (4.33) and (4.34).

---

9) The dash implies as usual that $m\neq n$.

1.4. Next we prove that

$$) \qquad \int_T^{T+U} P\,dt = O(UT^{-A}), \qquad \int_T^{T+U} \bar{P}\,dt = O(UT^{-A}).$$

sufficient to consider the first integral. We begin by replacing imits of summation in Φ_α and Φ_β by limits of the type $n < \underline{T}$. 4.23),

$$\Big(\sum_{m,n<\tau} - \sum_{m,n<\underline{T}}\Big) m^{-\frac{1}{2}-i(t+\alpha)} n^{-\frac{1}{2}-i(t+\beta)}$$

$$O\Big(T^{-A}\Big|\sum_{m<\underline{T}} m^{-\frac{1}{2}-i(t+\alpha)}\Big|\Big) + O\Big(T^{-A}\Big|\sum_{n<\underline{T}} n^{-\frac{1}{2}-i(t+\beta)}\Big|\Big) + O(T^{-A}).$$

last term obviously gives rise to an error $O(UT^{-A})$, and the argu- of the last section shows that the same is true of the first two . Hence the change of the limits of summation is irrelevant to the nent.

Now

$$2) \qquad \int_T^{T+U} \Big(\frac{t}{2\pi e}\Big)^{it+\frac{1}{2}i(\alpha+\beta)} \Big(\sum_{m,n<\underline{T}} m^{-\frac{1}{2}-i\alpha} n^{-\frac{1}{2}-i\beta} (mn)^{-it}\Big)\,dt$$

$$= O\Big(\sum_{m,n<\underline{T}} \frac{1}{\sqrt{mn}} \Big|\int_T^{T+U} \Big(\frac{t}{2\pi e mn}\Big)^{it+\frac{1}{2}i(\alpha+\beta)} dt\Big|\Big).$$

ve write $2\pi mn = \xi$ and $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \gamma$, we have $\xi < T$ and $\gamma \leqq H < T$. Hence we may apply Lemma 16, and the integral on ight hand side of (4.42) is

$$O\Big(\frac{1}{\log \frac{T}{2\pi mn}}\Big).$$

$\neq n$ we have

$$\log \frac{T}{2\pi mn} > \log\Big(\frac{\mathrm{Max}\,(m^2, n^2)}{mn}\Big) = \Big|\log \frac{m}{n}\Big|;$$

if $m = n < \underline{T} - 1$ we have

$$\log \frac{T}{2\pi mn} = \log \frac{T}{2\pi m^2} = 2 \log \frac{\underline{T}}{m}.$$

e results give us upper bounds for all the terms in (4.42) except for which m and n have each their greatest value, and this term ainly $O\left(\frac{U}{T}\right)$. We thus obtain

$$\int_T^{T+U} = O\Big(\sum_{m,n<\underline{T}}{}' \frac{1}{\sqrt{mn}\left|\log\frac{m}{n}\right|}\Big) + O\Big(\sum_{m<\underline{T}-1} \frac{1}{m\log\frac{\underline{T}}{m}}\Big) + O\Big(\frac{U}{T}\Big)$$

$$= O(\underline{T}\log\underline{T}) + O\Big(\sum_{m<\frac{1}{2}\underline{T}} \frac{1}{m}\Big) + O\Big(\sum_{\frac{1}{2}\underline{T}\leqq m<\underline{T}-1} \frac{\underline{T}}{m}\Big) + O\Big(\frac{U}{T}\Big)$$

$$= O(\underline{T}\log\underline{T}) + O(\log\underline{T}) + O(\underline{T}\log\underline{T}) + O\Big(\frac{U}{T}\Big) = O(UT^{-A}),$$

since $U > T^a$ and $\underline{T} = O(\sqrt{T})$. We have thus proved (4.41).

4.5. From (4.29), (4.31), and (4.41) it follows that

$$(4.51)\qquad \int_T^{T+U} X(t+\alpha)\,X(t+\beta)\,dt = \int_T^{T+U} (Q+\overline{Q})\,dt + O(UT^{-A}).$$

It is clear moreover that, in Q and $\overline{Q}$, we may modify the limits of summation in the same way as in P and $\overline{P}$. Denoting the modified forms of Q and $\overline{Q}$ by Q_1 and $\overline{Q}_1$, we have

$$(4.52)\qquad J = \int_T^{T+U} I^2\,dt = \int_T^{T+U} dt \int_0^H\int_0^H X(t+\alpha)\,X(t+\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \int_0^H\int_0^H d\alpha\,d\beta \int_T^{T+U} X(t+\alpha)\,X(t+\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \int_0^H\int_0^H d\alpha\,d\beta \int_T^{T+U} (Q_1+\overline{Q}_1)\,dt + O(H^2UT^{-A})$$

$$= \underset{\sim}{J} + O(H^2UT^{-A}) = \underset{\sim}{J} + O(UT^{-A}),$$

say, if c is sufficiently small.

4.6. The value of $\underset{\sim}{J}$ is, by (4.28) and (4.29),

$$(4.61)\qquad \underset{\sim}{J} = \sqrt{2\pi}\,\Re\Big[\int_0^H\int_0^H d\alpha\,d\beta \int_T^{T+U} \Big(\frac{t}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{2}i(\alpha-\beta)} \sum_{m,n<\underline{T}} m^{-\frac{1}{2}-i\alpha}\,n^{-\frac{1}{2}+i\beta}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{it}\,dt\Big].$$

We begin the discussion of the right hand side by showing that the contribution of the terms for which $m \neq n$ is $O(UT^{-A})$.

If $m \neq n$, write $\frac{n}{m} = e^{\lambda}$ and $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \gamma$, so that $|\gamma| < H$. Then

$$\int_T^{T+U} t^{i\gamma}\,e^{\lambda i t}\,dt = \Big[\frac{t^{i\gamma}\,e^{\lambda i t}}{\lambda i}\Big]_T^{T+U} - \frac{\gamma}{\lambda}\int_T^{T+U} t^{i\gamma-1}\,e^{\lambda i t}\,dt = O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) + O\Big(\frac{HU}{\lambda T}\Big) = O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

Hence the terms in which $m \neq n$ contribute, when we integrate with respect to t,

$$O\Big(\sum_{m,n<\underline{T}}{}' \frac{1}{\sqrt{mn}\left|\log\frac{m}{n}\right|}\Big) = O(\sqrt{T}\log T),$$

when we integrate with respect to α and β,

$$O(H^2\sqrt{T}\log T) = O(UT^{-A}),$$

nce more c is sufficiently small.

We have therefore, from (4.52) and (4.61),

$$J = \sqrt{2\pi}\,\Re\Big[\sum_{n<\underline{T}}\frac{1}{n}\int_0^H\int_0^H d\alpha\,d\beta\int_{\underline{T}}^{T+U}\Big(\frac{t}{2\pi n^2}\Big)^{\frac{1}{2}i(\alpha-\beta)}dt\Big] + O(UT^{-A}). \tag{62}$$

4.7. Write

$$\frac{t}{2\pi n^2} = v_n = v.$$

n

$$\int_0^H\int_0^H v^{\frac{1}{2}i(\alpha-\beta)}\,d\alpha\,d\beta = \Big(\frac{\sin(\frac{1}{2}H\log v)}{\frac{1}{2}\log v}\Big)^2 = V_n,$$

Also

$$V_n = 8\,\frac{1-\cos(\frac{1}{2}H\log v)}{(\log v)^2} = 2\int_0^H dH_1\int_0^{H_1}\cos\Big(\frac{1}{2}H_2\log v\Big)\,dH_2.$$

nce, if $|u-n|\leqq 1$,

$$V_u - V_n = 2\int_0^H dH_1\int_0^{H_1}\Big(\cos\Big(\frac{1}{2}H_2\log\frac{t}{2\pi u^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{2}H_2\log\frac{t}{2\pi n^2}\Big)\Big)\,dH_2.$$

difference of cosines here is

$$O(1)\,O\Big(\frac{H}{n}\Big) = O\Big(\frac{H}{n}\Big),$$

$$V_u - V_n = O\Big(\frac{H^3}{n}\Big). \tag{71}$$

We have now, from (4.62),

$$O(UT^{-A}) = \sqrt{2}\pi\sum_{n<\underline{T}}\frac{1}{n}\int_{\underline{T}}^{T+U}V_n\,dt = \Big(\sqrt{2\pi}\sum_{n<T^{\frac{1}{4}}} + \sqrt{2\pi}\sum_{T^{\frac{1}{4}}\leqq n<\underline{T}}\Big) = J_1 + J_2,$$

The first sum is

$$O\Big(\sum_{n<T^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{n}\int_{\underline{T}}^{T+U}\frac{dt}{(\log T)^2}\Big) = O\Big(\frac{U}{\log T}\Big).$$

J_2 we may replace summation with respect to n by integration with ect to u, with an error

$$O\Big(\sum_{T^{\frac{1}{4}}\leqq n<T}\frac{1}{n}\cdot U\cdot\frac{H^3}{n}\Big) = O(H^3UT^{-A}) = O(UT^{-A}),$$

if c is small enough. Thus

$$J = \sqrt{2\pi}\int_T^{T+U} dt \int_{T^{\frac{1}{4}}}^{\frac{T}{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4}H\log\frac{t}{2\pi u^2}\right)}{\frac{1}{4}\log\frac{t}{2\pi u^2}}\right)^2 \frac{du}{u} + O\left(\frac{U}{\log T}\right). \tag{4.72}$$

4.8. In (4.72) we may replace $\underline{T} = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ by $\tau = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. For since $\tau - \underline{T} = O\left(\frac{U}{\sqrt{T}}\right)$, the error thus introduced is

$$O\left(\int_T^{T+U} \frac{U}{\sqrt{T}} \cdot H^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} dt\right) = O\left(\frac{H^2U^2}{T}\right) = O\left(\frac{U}{\log T}\right),$$

if c is small enough. Further, if we write

$$\frac{t}{2\pi u^2} = e^{\frac{4x}{H}}, \quad -\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{H},$$

we obtain

$$\int_{T^{\frac{1}{4}}}^{\frac{T}{2\pi}} \left(\frac{\sin\frac{1}{4}H\log\frac{t}{2\pi u^2}}{\frac{1}{4}\log\frac{t}{2\pi u^2}}\right)^2 \frac{du}{u} = 2H\int_0^{\xi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx,$$

where

$$\xi = \frac{1}{4}H\log\frac{t}{2\pi\sqrt{T}}.$$

Thus the integral in (4.72) becomes

$$2\sqrt{2\pi}H\int_T^{T+U} dt \int_0^{\xi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 2\sqrt{2\pi}H\int_T^{T+U} \left(\frac{1}{2}\pi + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) dt$$
$$= \pi\sqrt{2\pi}HU + O\left(\frac{U}{\log T}\right). \tag{4.73}$$

Finally, from (4.72), and (4.73), we deduce

$$J = \pi\sqrt{2\pi}HU + O\left(\frac{U}{\log T}\right),$$

and Lemma 18 is proved, when $b = \frac{5}{8}$.

4.9. It is easy now to remove the restriction that $b = \frac{5}{8}$. Suppose only that $U > T^a$, and let

$$U_1 = T^d, \quad d = \tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}) < a.$$

Then

$$U_1 = O\left(\frac{U}{H\log T}\right),$$

is small enough, and

$$\int_{r U_1}^{(r+1) U_1} I^2\,dt = \pi\sqrt{2\pi}\,H U_1 + O\left(\frac{U_1}{\log(T+rU_1)}\right) = \pi\sqrt{2\pi}\,H U_1 + O\left(\frac{U_1}{\log T}\right),$$

$= 0, 1, 2, \ldots, \nu-1 = \left[\frac{U}{U_1}\right] - 1$. Adding all these equations, we obtain

$$\int_{T}^{T+\nu U_1} I^2\,dt = \pi\sqrt{2\pi}\,H U_1\left[\frac{U}{U_1}\right] + O\left(\frac{U}{\log T}\right) = \pi\sqrt{2\pi}\,H U + O\left(\frac{U}{\log T}\right).$$

$$\int_{T+\nu U_1}^{T+U} I^2\,dt = O(H U_1) + O\left(\frac{U_1}{\log T}\right) = O\left(\frac{U}{\log T}\right).$$

sum of the last two equations gives the result required.

5. Proof that $N_0(T+U) - N_0(T) > KU$.

5.1. Lemma 19. *If U and H satisfy the conditions of Lemma* 18, *and*

$$M = M(t, H) = \int_{t}^{t+H} \zeta(\tfrac{1}{2}+iu)\,du - H,$$

$$N = N(T, U) = \int_{T}^{T+U} |M|^2\,dt = O(U).$$

The proof of this lemma is very similar to that of Lemma 18. As , we suppose initially that $b = \frac{5}{8}$ and $t > 0$. We have, by Lemma 15,

$$+\alpha) = \zeta(\tfrac{1}{2}+it+i\alpha) - 1$$

$$= \sum_{2\leqq m<\tau_\alpha} m^{-\frac{1}{2}-it-i\alpha} + \left(\frac{t+\alpha}{2\pi e}\right)^{-i(t+\alpha)} e^{\frac{1}{4}\pi i} \sum_{n<\tau_\alpha} n^{-\frac{1}{2}+it+i\alpha} + O(T^{-A})$$

e $\tau_\alpha = \sqrt{\frac{t+\alpha}{2\pi}}$. As in 4.2, we may replace τ_α by τ, and $\left(\frac{t+\alpha}{2\pi e}\right)^{-i(t+\alpha)}$ $\frac{t}{2\pi e}\Big)^{-i(t+\alpha)} e^{-i\alpha}$. Thus

$$+\alpha) = \sum_{2\leqq m<\tau} m^{-\frac{1}{2}-it-i\alpha} + \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-i(t+\alpha)} e^{\frac{1}{4}\pi i - i\alpha} \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}+it+i\alpha} + O(T^{-A}),$$

$$+\beta) = \sum_{2\leqq m<\tau} m^{-\frac{1}{2}+it+i\beta} + \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{i(t+\beta)} e^{-\frac{1}{4}\pi i + i\beta} \sum_{n<\tau} n^{-\frac{1}{2}-it-i\beta} + O(T^{-A}).$$

ave therefore

$$(t+\alpha)\,\overline{\varphi}(t+\beta) = P + Q_1 + Q_2 + R + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + W,$$

where

$$P = \sum m_1^{-\frac{1}{2}-it-i\alpha} m_2^{-\frac{1}{2}+it+i\beta},$$

$$Q_1 = \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{i(t+\beta)} e^{-\frac{1}{4}\pi i+i\beta} \sum m^{-\frac{1}{2}-it-i\alpha} n^{-\frac{1}{2}-it-i\beta},$$

Q_2 is a sum of the same type as Q_1,

$$R = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i(\beta-\alpha)} \sum n_1^{-\frac{1}{2}+it+i\alpha} n_2^{-\frac{1}{2}-it-i\beta}.$$

$$S_1 = O\left(T^{-A}\left|\sum m^{-\frac{1}{2}-it-i\alpha}\right|\right),$$

S_2, S_3, S_4 are sums of the same type as S_1, and

$$W = O(T^{-A}).$$

In the summations every m runs over the range $2 \leqq m < \tau$ and every n over the range $1 \leqq n < \tau$.

We write

$$\int_T^{T+U} \varphi(t+\alpha)\bar{\varphi}(t+\beta)\,dt = \int_T^{T+U} (P+Q_1+Q_2+R+S_1+S_2+S_3+S_4+W)\,d$$

$$= P^0+Q_1^0+Q_2^0+R^0+S_1^0+S_2^0+S_3^0+S_4^0+W^0.$$

Obviously

$$W^0 = O(UT^{-A}); \tag{5.11}$$

and

$$S_1^0+S_2^0+S_3^0+S_4^0 = O(UT^{-A}) \tag{5.12}$$

in virtue of the argument of 4.3.

Next

$$Q_1^0 = \int_T^{T+U} Q_1\,dt = O(1)\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} m^{i(\beta-\alpha)} \int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi emn}\right)^{i(t+\beta)} dt$$

$$= O\left(\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \left|\int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi emn}\right)^{i(t+\beta)} dt\right|\right);$$

and so, by the argument of 4.4,

$$Q_1^0+Q_2^0 = O(UT^{-A}). \tag{5.13}$$

Thus

$$\int_T^{T+U} \varphi(t+\alpha)\bar{\varphi}(t+\beta)\,dt = P^0+R^0+O(UT^{-A}). \tag{5.14}$$

5.2. Again

$$21) \qquad R^0 = \int_T^{T+U} R\,dt = \sum n_1^{-\frac{1}{2}+i\alpha} n_1^{-\frac{1}{2}-i\beta} \int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i(\beta-\alpha)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{it} dt$$

$$= \sum_{n_1=n_2} + \sum_{n_1 \neq n_2} = R_1^0 + R_2^0,$$

. Now

$$\int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i(\beta-\alpha)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{it} dt = O\left(\frac{1}{\left|\log \frac{n_1}{n_2}\right|}\right) \qquad (n_1 \neq n_2),$$

the argument of 4.6; and so

$$22) \qquad R_2^0 = O\left(\sum_{n_1 \neq n_2} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}\left|\log \frac{n_1}{n_2}\right|}\right) = O(T \log T) = O(UT^{-A}).$$

Similarly

$$23) \qquad P^0 = \int_T^{T+U} P\,dt = \sum m_1^{-\frac{1}{2}-i\alpha} m_2^{-\frac{1}{2}+i\beta} \int_T^{T+U} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{it} dt$$

$$= \sum_{m_1=m_2} + \sum_{m_1 \neq m_2} = P_1^0 + P_2^0,$$

d

$$24) \qquad P_2^0 = O\left(\sum_{m_1 \neq m_2} \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}\left|\log \frac{m_1}{m_2}\right|}\right) = O(UT^{-A}).$$

om (5.14), (5.21), (5.22), (5.23) and (5.24), it follows that

$$25) \qquad \int_T^{T+U} \varphi(t+\alpha)\overline{\varphi}(t+\beta)\,dt = P_1^0 + R_1^0 + O(UT^{-A}).$$

5.3. Hence

$$.31) \qquad N = \int_T^{T+U} |M|^2\,dt = \int_T^{T+U} M\overline{M}\,dt$$

$$= \int_T^{T+U} dt \int_0^H (\zeta(\tfrac{1}{2}+it+i\alpha)-1)\,d\alpha \int_0^H (\zeta(\tfrac{1}{2}-it-i\beta)-1)\,d\beta$$

$$= \int_T^{T+U} dt \int_0^H \varphi(t+\alpha)\,d\alpha \int_0^H \overline{\varphi}(t+\beta)\,d\beta = \int_0^H d\alpha \int_0^H d\beta \int_T^{T+U} \varphi(t+\alpha)\overline{\varphi}(t+\beta)\,dt$$

$$= \int_0^H \int_0^H (P_1^0 + R_1^0)\,d\alpha\,d\beta + O(H^2 UT^{-A})$$

$$= \int_0^H \int_0^H (P_1^0 + R_1^0)\,d\alpha\,d\beta + O(UT^{-A}),$$

c is sufficiently small.

Now

$$R_1^0 = \sum n^{i(\alpha-\beta)-1} \int_T^{T+U} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{i(\beta-\alpha)} dt,$$

$$\int_0^H \int_0^H R_1^0 \, d\alpha \, d\beta = \sum \frac{1}{n} \int_T^{T+U} dt \int_0^H \int_0^H \left(\frac{t}{2\pi n}\right)^{i(\beta-\alpha)} d\alpha \, d\beta \tag{5.32}$$

$$= 4 \sum \frac{1}{n} \int_T^{T+U} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} H \log \frac{t}{2\pi n}\right)}{\log \frac{t}{2\pi n}} \right)^2 dt$$

$$= O\left(\sum \frac{1}{n} \frac{U}{(\log T)^2} \right) = O\left(\frac{U}{\log T}\right).$$

Further

$$P_1^0 = \sum m^{i(\beta-\alpha)-1} \int_T^{T+U} dt = U \sum m^{i(\beta-\alpha)-1},$$

$$\int_0^H \int_0^H P_1^0 \, d\alpha \, d\beta = 4U \sum \frac{1}{m} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2} H \log m)}{\log m} \right)^2 = O(U). \tag{5.33}$$

Finally, from (5.25), (5.32) and (5.33), we deduce

$$N = O(U)$$

the result of the lemma, when $b = \frac{5}{8}$. This restriction on b may now be removed just as in 4.9.

5.4. As in 2.8 we write

$$\underline{I} = \int_t^{t+H} |X(u)| \, du.$$

Lemma 20. *There exists an A such that*

$$\underline{I} > \tfrac{1}{2} H$$

throughout the interval $\underline{T} = (T, T+U)$, except in a set $\underline{S}$ of measure less than $\frac{AU}{H^{\frac{1}{2}}}$.

Provided we choose $A \geqq 16$, we may suppose $H \geqq 4$. We have then, by (2.61)

$$\underline{I} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_t^{t+H} \left| \zeta\left(\tfrac{1}{2} + iu\right) \right| \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) du$$

$$> \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_t^{t+H} \left| \zeta\left(\tfrac{1}{2} + iu\right) \right| du + O\left(H T^{\frac{1}{4}} \frac{1}{T}\right) > \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\Re \int_t^{t+H} \zeta\left(\tfrac{1}{2} + iu\right) du - 1 \right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} (H - 1 + \Re M) > \left(\frac{3}{4} H - |M|\right).$$

ence, in $\underset{\sim}{S}$,

$$|M| \geqq \tfrac{1}{4}H.$$

ce $\int_T^{T+U} |M|^2 dt < AU$, we must have

$$(\tfrac{1}{4}H)^2 m\underset{\sim}{S} < AU,$$

ence the lemma.

5.5. From Lemma 18 we have

.51) $$\int_T^{T+U} I^2 dt < AHU \qquad (H \geqq 4).$$

is inequality is sufficient for the deduction of Theorem B. Let $\underset{\sim}{S}'$ be e sub-set of $\underset{\sim}{T}$ for which $|I| \geqq \frac{1}{2}H$. By (5.51),

$$m\underset{\sim}{S}' < \frac{AU}{H}.$$

ow $\underset{\sim}{I} > |I|$, except possibly in $\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{S}'$. The measure of $\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{S}'$ is less an $\varepsilon_H U$, where ε_H is a function of H only which tends to zero as $\to \infty$; and Theorem B follows by the argument used in 2.9 to establish eorem A.

6. Remarks on the proof of Theorem B.

6.1. As was observed in 5.5, we do not use the full force of mma 18. The complete lemma, however, seems of considerable interest itself, and it may prove to be of service in the future. At the moment, wever, we are unable to derive from it any suggestion for a method reducing the factor $\log T$ by which Theorem B falls short of what is ubtless the real truth. It is instructive to examine how our proof ls to give more, and we add in conclusion some remarks on this and related points.

6.2. The inequality (5.51) may be replaced by the more precise ation

21) $$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \left(\frac{I}{H}\right)^2 dt = O\left(\frac{1}{H}\right) + O\left(\frac{1}{H^2 \log T}\right).$$

ow $I:H$ is the mean of $X(u)$ in t to $t+H$, and the left hand side (6.21) is the mean square of $I:H$. The equation (6.21) expresses fact that the mean of $X(u)$ diminishes, on the average, in absolute ue as H increases, a fact naturally connected with the presence of os. An equation of this kind is, indeed, the kernel of the proof.

To carry out the details, however, we have to compare I and $\underset{\sim}{I}$. ere is no known direct means of averaging $\underset{\sim}{I}$ (as opposed to $\underset{\sim}{I}^2$). Now $\underset{\sim}{I}$

is substantially $B\int_t^{t+H}|\zeta(\frac{1}{2}+iu)|\,du$. We proceed in our proof by using the inequality

$$\int_t^{t+H}|\zeta|\,dt \geqq \left|\int_t^{t+H}\zeta\,dt\right| \geqq \Re\int_t^{t+H}\zeta\,dt = H+\Re M; \tag{6.22}$$

and we show that, when $H>\frac{A}{\log T}$, the mean square of $|M|$ is $O(H)$, so that M is generally $O(\sqrt{H})$. This enables us to show that $\underset{\sim}{I}$ is generally greater than $\frac{1}{2}BH$, when H is a sufficiently large constant, and so, since I is generally less than $\frac{1}{2}BH$, to deduce our theorem.

But since $\sqrt{H}$ dominates H when H is small, the argument fails when H is a *small* constant, and this is the obstacle to further progress.

When H is small, $\Re M$ is (generally) more important than H. It might be supposed that the mean square of $B|\int\zeta\,dt|$ is greater than that of I, and that, if we could overcome difficulties of detail, we could conclude that $\underset{\sim}{I}$ is generally greater than I. But unfortunately the mean square of $B|\int\zeta\,dt|$, when H is small, is asymptotically *one half* that of I, as may be verified from (5.33)[10]). It would appear, then, that we lose something essential in replacing $\int|\zeta|\,dt$ by $|\int\zeta\,dt|$. This does not sound very surprising at first sight. But there is less difference between the two expressions, or between $|X(u)|$ and $B\zeta(\frac{1}{2}+iu)$, than might be supposed. If we assume the Riemann hypothesis, and write

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}(T\log T-(1+\log 2\pi)T)+R(T),$$

we have, from (2.61),

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|=A\,|X(t)|\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)=A\,e^{iC}\,e^{\pi iR(t)}\,|X(t)|\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Now it is known that $R(T)=o(\log T)$ and it is possible to show that

$$\frac{1}{T}\int_0^T|R(t)|\,dt=O(\log\log T).$$

Thus we should expect that, provided $H=o\left(\frac{1}{\log\log T}\right)$, $\left|\int_t^{t+H}\zeta(\frac{1}{2}+iu)\,du\right|$ would generally be asymptotically equivalent to $\int_t^{t+H}|\zeta(\frac{1}{2}+iu)|\,du$.

[10]) It is easily shown that, when H is small,

$$4\sum^{r}\frac{\sin^2(\frac{1}{2}H\log n)}{n(\log n)^2}\sim 4\int_1^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{1}{2}H\log u)}{u(\log u)^2}\,du=\pi H.$$

6. 3. We note finally a deduction from Lemma 18 which, though e are unable to make any use of it, appears very curious.

Let K satisfy the same conditions as H. Then, since

$$I(t, H+K) = I(t, H) + I(t+H, K),$$

have

$$\int_T^{T+U} I(t, H) I(t+H, K)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t, H+K)\, dt - \tfrac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t, H)\, dt - \tfrac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t+H, K)\, dt.$$

ow

$$\int_T^{T+U} I^2(t+H, K)\, dt = \int_T^{T+U} I^2(t, K)\, dt - \int_T^{T+H} I^2(t, K)\, dt + \int_{T+U}^{T+U+H} I^2(t, K)\, dt,$$

$$\int_T^{T+U} (I^2(t+H, K) - I^2(t, K))\, dt = O(HK^2 T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = O\left(\frac{U}{\log T}\right),$$

ovided c is small enough. Hence

$$\int_T^{T+U} I(t, H) I(t+H, K)\, dt = \frac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t, H+K)\, dt - \frac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t, H)\, dt - \frac{1}{2}\int_T^{T+U} I^2(t, K)\, dt + O\left(\frac{U}{\log T}\right) = O\left(\frac{U}{\log T}\right),$$

Lemma 18. This is true uniformly for $0 \leqq H \leqq T^c$, $0 \leqq K \leqq T^c$. ien $c = c(a)$ is sufficiently small.

(Eingegangen am 14. Oktober 1920.)

Über affine Geometrie. XXXI: Beständig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Eilinien.

Von

K. Reidemeister in Hamburg.

P. Böhmer hat auf Veranlassung von H. Minkowski 1904 bewiesen[1]): *Fünf Punkte einer geschlossenen beständig elliptisch gekrümmten Eilinie liegen stets auf einer Ellipse.* H. Mohrmann hat 1912 ergänzend gezeigt[2]): *Eine beständig hyperbolisch gekrümmte ebene Kurve läßt sich stets zu einer (offenen) Eilinie mit derselben Eigenschaft ergänzen, und fünf ihrer Punkte liegen stets auf einer Hyperbel.* Dabei heißt eine Kurve eine Eilinie, wenn sie in der euklidischen Ebene einen (beschränkten oder unbeschränkten) Eibereich (konvexen Bereich) begrenzt und genügend oft differenzierbar ist, und beständig elliptisch (hyperbolisch) gekrümmt, wenn alle Schmiegkegelschnitte Ellipsen (Hyperbeln) sind.

Zum Beweise wird gezeigt, daß eine beständig elliptisch (hyperbolisch) gekrümmte Eilinie $\mathfrak{E}$ nur 4 Punkte mit einer Parabel gemeinsam haben kann. Die Annahme von 5 Schnittpunkten, von denen nicht 4 in einen zusammenfallen, führt nämlich zur Existenz einer Parabel, welche von $\mathfrak{E}$ zweimal von innen, wie einer Parabel, welche von $\mathfrak{E}$ zweimal von außen berührt wird — im Widerspruch mit dem Hilfssatz, daß eine stets elliptisch (hyperbolisch) gekrümmte $\mathfrak{E}$ eine Parabel nur zweimal von innen (außen) berühren kann. Dieser Hilfssatz aber, der wesentlichste Punkt des Beweises, ergibt sich durch Konstruktion des Minkowskischen Krümmungsgebildes von $\mathfrak{E}$. Leichter und schöner führt hier ein von Herrn W. Blaschke angeregter Gedanke zum Ziele.

---

[1]) P. Böhmer, Über elliptisch-konvexe Ovale, Math. Ann., 60 (1905), S. 256–262.

[2]) H. Mohrmann, Über beständig elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmte Kurven, Math. Ann., 72 (1912), S. 285–291; Über beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke, ebenda, S. 593–595.

Der Hilfssatz werde folgendermaßen formuliert:

Seien g_1 und g_2 zwei Geraden, die den eigentlichen Punkt P_3 gemeinsam haben, P_1, P_2 mit g_1 bzw. inzidierende von P_3 verschiedene Punkte, π das im Dreieck $P_1P_2P_3$ liegende Stück der Parabel, welche g_1 in P_1 und g_2 in P_2 berührt, und Γ ein im Dreieck $P_1P_2P_3$ verlaufendes, doppelpunktfreies stets elliptisch (hyperbolisch) gekrümmtes Kurvenstück,

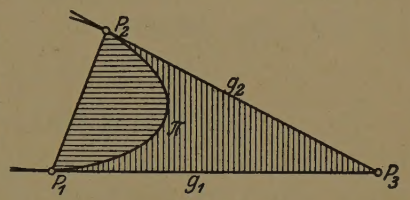

Fig. 1.

das g_1 in P_1 und g_2 in P_2 berührt. *Dann verläuft Γ ganz in dem durch die Gerade P_1P_2 und π (durch g_1, g_2 und π) begrenztem Gebiete.*

Unter Zugrundelegung kartesischer Koordinaten sei $\{x(t), y(t); t_1 \leqq t \leqq t_2\}$ die Parameterdarstellung eines wendepunktfreien Kurvenstückes. Dann ist $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \neq 0$, und es läßt sich daher t durch einen solchen Parameter τ ersetzen, daß $\frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d^2x}{d\tau^2} = \text{const}$ wird. Daraus folgt, wenn $\frac{dx}{d\tau} = x'$ gesetzt wird, durch nochmaliges Differenzieren $x' \cdot y''' - y' \cdot x''' = 0$, also die Existenz einer Funktion $\varkappa(\tau)$, so daß

$$x'''(\tau) + \varkappa(\tau)\, x'(\tau) = 0$$
$$y'''(\tau) + \varkappa(\tau)\, y'(\tau) = 0.$$

Für $\varkappa = \text{const}$ ist $\{x(\tau), y(\tau)\}$ eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $\varkappa$ größer, kleiner oder gleich Null ist, und allgemein ist $\{x(\tau), y(\tau)\}$ in Punkte τ_0 elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch gekrümmt, je nachdem $\varkappa(\tau_0)$ größer, kleiner oder gleich Null ist. — Die Gleichungen sind invariant gegen affine Transformationen.

Dies benützend werfen wir P_1, P_2, P_3 in die Punkte $(1,0), (0,1), (0,0)$ und stellen Γ durch $\{x(t), y(t);\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ dar, wobei $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3x}{dt^3} = 0$ sei. Dann ergeben sich die Randbedingungen

$$x(0) = 1 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0; \qquad x(1) = 0 \quad y(1) = 1 \quad x'(1) = 0$$

und für π die Parameterdarstellung $x = (t-1)^2$, $y = t^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. Mit $f_1(t) = x(t) - (t-1)^2$ und $f_2(t) = y(t) - t^2$, so ist, wenn Ableitungen nach t durch Striche angedeutet werden,

$$f_1(0) = 0 \quad f_1(1) = 0 \quad f_1'(1) = 0$$
$$f_2(0) = 0 \quad f_2(1) = 0 \quad f_2'(0) = 0.$$

Daraus läßt sich folgern, daß $f_i(t) \neq 0$ für $0 < t < 1$ $(i = 1, 2)$. Denn bei Annahme des Gegenteils müßte $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$ zwei Wendepunkte besitzen, mithin ein t_i existieren, so daß $f_i'''(t_i) = 0$ wäre $(i = 1, 2)$. Das heißt aber, es müßte

$$x'''(t_1) = -\varkappa(t_1) \cdot x'(t_1) = 0; \quad x'(t_1) = 0$$
$$y'''(t_2) = -\varkappa(t_2) \cdot y'(t_2) = 0; \quad y'(t_2) = 0$$

sein, was mit den Voraussetzungen über Γ unverträglich ist, da t_1 und t_2 wegen $x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t) \neq 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ nicht zusammenfallen können. Indem wir nun jedem Punkt von π den Punkt mit gleichem t von Γ zuordnen, erschließen wir leicht die Richtigkeit des Hilfssatzes. —

Für die Annahme von 5 gemeinsamen Punkten einer Kurve $\mathfrak{C}$ und einer Parabel bleibt nur noch die Möglichkeit einer vierpunktig berührenden Parabel, die noch einen weiteren Schnittpunkt P mit $\mathfrak{C}$ hat, übrig. Indem wir eine solche Parabel als Grenzlage von zweimal zweipunktig berührenden auffassen, erhellt, daß Parabel und $\mathfrak{C}$ sich in P mindestens zweipunktig berühren müßten; das ist aber eine bereits als unmöglich erwiesene Konfiguration.

Aus dem bewiesenen Theorem lassen sich leicht einige — allerdings ziemlich triviale — Sätze der projektiven Geometrie herleiten, auf deren Formulierung hier verzichtet sei.

Hamburg, Math. Seminar.

(Eingegangen am 1. Nov. 1920.)